

Geometria 2

Francesco Sorce

Appunti del corso tenuto dai proff.
Frigerio Roberto, Talpo Mattia e Abate Marco.

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
Anno Accademico 2022/2023

Indice

1	Geometria Proiettiva	4
1.1	Spazi proiettivi e nozioni introduttive	4
1.1.1	Spazio proiettivo	4
1.1.2	Trasformazioni Proiettive	5
1.1.3	Sottospazi proiettivi	7
1.1.4	Riferimenti proiettivi	11
1.1.5	Coordinate omogenee	14
1.2	Spazi proiettivi estendono gli spazi affini	15
1.2.1	Carte affini	15
1.3	Approfondimento sulle proiettività	19
1.3.1	Prospettività	19
1.3.2	Corrispondenza tra Affinità e Proiettività	20
1.3.3	Trasformazioni lineari fratte	22
1.4	Dualità	23
1.5	Birapporto	26
1.6	Coniche proiettive	30
1.6.1	Equivalenza proiettiva e Classificazione delle coniche	31
1.6.2	Parte affine e chiusura proiettiva	34
1.6.3	Tangenti	37
1.6.4	Polarità	40
1.6.5	Punti reali e punti complessi	41
1.6.6	Sistemi lineari di coniche	42
2	Topologia generale	44
2.1	Spazi Metrici	44
2.2	Spazi topologici	48
2.2.1	Equivalenza topologica di distanze e limitatezza	49
2.2.2	La categoria Top	51
2.2.3	Chiusura e Parte interna	51
2.2.4	Basi e Prebasi	53
2.3	Assiomi di Numerabilità e Intorni	55
2.3.1	Intorni	55
2.3.2	Sistemi fondamentali di intorni e I-numerabilità	56
2.3.3	II-numerabilità e Separabilità	57
2.3.4	Successioni	58
2.4	Topologia di sottospazio	60
2.5	Mappe aperte e chiuse	63
2.6	Prodotti	64

2.6.1	Proiezioni da un prodotto in un fattore	68
2.6.2	Immersioni dei fattori nel prodotto	68
2.6.3	Topologia della convergenza puntuale	69
2.7	Assiomi di separazione	69
2.8	Ricoprimenti fondamentali	76
2.9	Spazi connessi	79
2.9.1	Componenti connesse	83
2.10	Compattezza	86
2.10.1	Sottoinsiemi compatti	88
2.10.2	Compattezza per prodotti	90
2.10.3	Compattificazione di Alexandroff	92
2.10.4	Compattezza in spazi metrici	95
2.11	Topologia Quoziente	106
2.11.1	Passaggio a quoziente e Identificazioni	107
2.11.2	Insiemi saturi	109
2.11.3	Collassamento, Unione disgiunta e Bouquet	110
2.12	Quozienti per azioni di gruppi	113
2.12.1	Assiomi di Separazione e Azioni	115
2.12.2	Domini fondamentali	118
2.13	Topologia dei Proiettivi	121
2.13.1	Caso Reale	121
2.13.2	Caso Complesso	123
2.13.3	Varietà topologiche	125
2.14	Appendice al capitolo 2	127
2.14.1	Esempi e controesempi	127
3	Teoria dell'omotopia e Rivestimenti	138
3.1	La categoria $h\text{Top}$	138
3.1.1	Le omotopie passano al quoziente	141
3.1.2	Funtore delle componenti connesse per archi	142
3.2	Gruppo fondamentale	142
3.2.1	Omotopia di cammini	142
3.2.2	Gruppo Fondamentale	144
3.2.3	Cammini chiusi come applicazioni dal cerchio	145
3.2.4	Funtorialità del gruppo fondamentale	148
3.2.5	Dipendenze del gruppo fondamentale	150
3.3	Spazi contraibili e retratti	151
3.3.1	Spazi contraibili	151
3.3.2	Retratti di Deformazione	152
3.4	Rivestimenti	154
3.4.1	Omeomorfismi locali	154
3.4.2	Rivestimenti	155
3.4.3	Sollevamenti	158
3.5	Azione di Monodromia	162
3.5.1	Applicazioni dell'azione di Monodromia	166
3.6	Teorema di Seifert-Van Kampen	167
3.7	Calcolo del Gruppo fondamentale	173
3.7.1	Gruppo fondamentale del prodotto	173
3.7.2	Prodotto libero e gruppi liberi	173
3.7.3	Van Kampen per intersezioni semplicemente connesse	176

3.7.4	Prodotto amalgamato	177
3.7.5	Presentazioni di gruppi	179
3.7.6	Rango	181
3.7.7	Gruppi fondamentali di proiettivi	181
3.7.8	Gruppi fondamentali di superfici	183
3.8	Rivestimento Universale	186
3.8.1	Proprietà categoriche dei rivestimenti	189
3.8.2	Rivestimenti regolari e corrispondenza di Galois	192
3.8.3	Applicazioni della teoria dei rivestimenti	197
4	Funzioni Olomorfe	199
4.1	Richiami di calcolo in più variabili	199
4.2	Funzioni olomorfe	203
4.3	Analitiche	206
4.3.1	Serie di potenze	207
4.3.2	Ordine di annullamento	210
4.4	Esponenziale e logaritmo complessi	212
4.4.1	Esponenziale complesso	212
4.4.2	Logaritmo complesso	213
4.5	1-Forme complesse	217
4.5.1	Integrazione di 1-forme	217
4.5.2	Primitive lungo curve e lungo omotopie	220
4.5.3	Forme chiuse da funzioni olomorfe	223
4.6	Indice di avvolgimento e Formula di Cauchy	226
4.6.1	Olomorfa implica analitica	227
4.7	Applicazioni	230
4.7.1	Disuguaglianze di Cauchy e Teorema di Liouville	230
4.7.2	Principio della media	231
4.7.3	Principio del massimo	232
4.8	Singularità	236
4.8.1	Serie di Laurent	237
4.8.2	Tipi di singularità	239
4.9	Funzioni meromorfe e Residui	241
4.9.1	Derivata Logaritmica	243
A	Appendice: Teoria delle categorie	246
A.1	Definizione	246
A.2	Proprietà universali	249
A.3	Esempi di categorie	251
B	Ringraziamenti	252

Capitolo 1

Geometria Proiettiva

La geometria proiettiva (per i nostri fini) è lo studio delle proprietà degli spazi proiettivi, i quali sono una generalizzazione “comoda” degli spazi affini ai quali siamo abituati. In questi spazi molte delle proprietà che valgono per gli spazi vettoriali restano intatte, ma a queste si aggiunge la possibilità di vedere lo spazio in modo più fluido (per esempio si elimina la distinzione tra rette incidenti e rette parallele sul piano proiettivo). Gli spazi proiettivi rendono la vita più semplice nello studio di curve algebriche, per esempio ellissi, parabole e iperboli sono in realtà espressioni diverse della stessa classe di curve se viste nel piano proiettivo.

1.1 Spazi proiettivi e nozioni introduttive

1.1.1 Spazio proiettivo

Definiamo l’oggetto centrale dei nostri studi.

Definizione 1.1 (Spazio Proiettivo).

Dato V spazio vettoriale su \mathbb{K} , definiamo il suo **spazio proiettivo associato** come

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim,$$

dove $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ t.c. $w = \lambda v$.

Intuitivamente la relazione collassa tutti i vettori appartenenti alla stessa retta in un elemento. Possiamo quindi pensare allo spazio proiettivo come l’insieme delle rette o direzioni in V .

Troviamo in effetti la seguente bigezione naturale:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{P}(V) & \longleftrightarrow & \text{rette di } V \\ [v] & \longmapsto & \text{Span}(v) \\ [v_r] & \longleftarrow & r \end{array}$$

dove v_r è un qualsiasi vettore in $r \setminus \{0\}$.

Esempio 1.2 (Proiettivi dello spazio banale e di una retta).

Osserviamo che $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset / \sim = \emptyset$, mentre per $v \neq 0$

$$\mathbb{P}(\text{Span}(v)) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} / \sim = \{[v]\},$$

ovvero lo spazio proiettivo associato ad una retta contiene un solo elemento.

Definizione 1.3 (Dimensione di uno spazio proiettivo).
Definiamo la **dimensione** dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ come

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(V) = \dim_{\mathbb{K}} V - 1.$$

Osservazione 1.4.

Gli spazi proiettivi non sono spazi vettoriali. Come vedremo sono in un certo senso una estensione degli spazi affini.

Definizione 1.5 (Punti, Rette e piani proiettivi).
Definiamo i seguenti termini:

- un **punto proiettivo** è uno spazio proiettivo di dimensione 0,
- una **retta proiettiva** è uno spazio proiettivo di dimensione 1,
- un **piano proiettivo** è uno spazio proiettivo di dimensione 2.

Definizione 1.6 (Spazio proiettivo standard).

Definiamo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ lo **spazio proiettivo standard** di dimensione n . Se il campo risulta chiaro da contesto scriveremo solo \mathbb{P}^n .

1.1.2 Trasformazioni Proiettive

Studiamo ora quali mappe preservano la struttura di spazio proiettivo.

Definizione 1.7 (Trasformazione proiettiva).

Una funzione $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è una **trasformazione proiettiva** se $\exists \varphi : V \rightarrow W$ lineare tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)].$$

In questa notazione affermiamo che f è **indotta** da φ .

Notazione 1.8.

Se f è la trasformazione proiettiva indotta da φ scriviamo $f = [\varphi]$.

Osservazione 1.9.

Se f è una trasformazione proiettiva ben definita indotta da φ allora φ è iniettiva.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo $\ker \varphi \neq \{0\}$. Sia quindi $v \in \ker \varphi \setminus \{0\}$. Osserviamo che

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [0],$$

ma $[0] \notin \mathbb{P}(W)$, quindi f non sarebbe ben definita. $\not\equiv$ □

Osservazione 1.10.

Ogni mappa lineare iniettiva $\varphi : V \rightarrow W$ induce una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tramite $[v] \mapsto [\varphi(v)]$.

Dimostrazione.

Verifichiamo la buona definizione. Osserviamo che per $v \neq 0$ abbiamo dalla iniettività di φ che $\varphi(v) \neq 0$. Se $[v] = [w]$, per definizione $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$[\varphi(v)] = [\varphi(\lambda w)] = [\lambda \varphi(w)] = [\varphi(w)].$$

□

Osservazione 1.11.

Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.

Dimostrazione.

Ricaviamo la definizione di iniettività. Supponiamo $f([v]) = f([w])$. Sia φ una mappa che induce f , da cui

$$[\varphi(v)] = [\varphi(w)].$$

Applicando la definizione delle classi di equivalenza

$$\varphi(v) = \lambda \varphi(w) = \varphi(\lambda w).$$

Essendo φ iniettiva troviamo che $v = \lambda w$ e quindi $[v] = [w]$ come volevamo mostrare. □

Osservazione 1.12.

$id_{\mathbb{P}(V)}$ è proiettiva ed è indotta da id_V .

Proposizione 1.13.

Date $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ e $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$ proiettive abbiamo che $g \circ f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$ è proiettiva.

Dimostrazione.

Sia φ una mappa che induce f e ψ una che induce g . Osserviamo che $\psi \circ \varphi$ induce $g \circ f$, infatti

$$[\psi \circ \varphi(v)] = g([\varphi(v)]) = g \circ f([v]).$$

□

Caratterizziamo ora gli isomorfismi di spazi proiettivi

Definizione 1.14 (Isomorfismo proiettivo).

Una trasformazione proiettiva surgettiva è chiamata **isomorfismo proiettivo**.

La seguente proposizione ci permette di giustificare la definizione

Proposizione 1.15 (Caratterizzazione degli isomorfismi proiettivi).

Sia $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ proiettiva. Le affermazioni seguenti sono equivalenti

1. f surgettiva,
2. f bigettiva,
3. $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$,
4. f invertibile e $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è proiettiva.

Dimostrazione.

1 \iff 2) Ovvio dato che f è iniettiva.

2 \implies 3) Sia φ una mappa che induce f . Mostriamo che φ è surgettiva:

Chiaramente $0 = \varphi(0)$, quindi basta verificare che $W \setminus \{0\} \subset \text{Imm } \varphi$. Sia quindi $w \in W \setminus \{0\}$, da cui $[w] \in \mathbb{P}(W)$. Dato che f è surgettiva $\exists [v] \in \mathbb{P}(V)$ tale che $[w] = f([v]) = [\varphi(v)]$, da cui $w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v)$, quindi $w \in \text{Imm } \varphi$.

Abbiamo quindi verificato che φ è un isomorfismo tra V e W , dunque

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W).$$

3 \implies 4) Sia φ lineare che induce f . Sappiamo che φ è iniettiva e che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$ (e quindi che $\dim V = \dim W$), dunque φ è un isomorfismo. L'inversa φ^{-1} di φ è ben definita ed è un isomorfismo di spazi vettoriali. Verifichiamo che $f^{-1} = [\varphi^{-1}]$.

$$\begin{aligned} [\varphi^{-1}]f([v]) &= [\varphi^{-1}][\varphi(v)] = [\varphi^{-1}\varphi(v)] = [v] \\ f[\varphi^{-1}]([v]) &= f([\varphi^{-1}(v)]) = [\varphi\varphi^{-1}(v)] = [v]. \end{aligned}$$

4 \implies 1) Essendo f invertibile è anche surgettiva. □

Definizione 1.16 (Proiettività).

Una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è definita **proiettività**. Denotiamo l'insieme delle proiettività con $\mathbb{P}GL(V)$.

Osservazione 1.17.

Ogni proiettività è un isomorfismo proiettivo.

Osservazione 1.18.

Le proiettività di $\mathbb{P}(V)$ munito della composizione è un gruppo.

Osservazione 1.19 (Punti fissi delle proiettività).

Possiamo caratterizzare i punti fissi delle proiettività. Sia f una proiettività indotta da φ e $[v]$ un punto fisso:

$$[v] = f([v]) = [\varphi(v)],$$

da cui $\lambda v = \varphi(v)$, cioè v è un autovettore di φ . Similmente se v è un autovettore di φ abbiamo che $[v]$ è un punto fisso per le stesse relazioni.

1.1.3 Sottospazi proiettivi

Poniamo per semplicità notazionale $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ la proiezione per la relazione definita all'inizio del capitolo.

Definizione 1.20 (Grassmanniana (NON DATA DURANTE IL CORSO)).

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $k \in \{0, \dots, n\}$. La **grassmanniana** k di V sono l'insieme di tutti i sottospazi vettoriali di V di dimensione k

$$Gr_k(V) = \{W \mid V \supseteq W \text{ ssp. vett., } \dim W = k\}.$$

Poniamo inoltre

$$Gr(k, n) = Gr_k(\mathbb{K}^n).$$

Definizione 1.21 (Sottospazio proiettivo).

Un **sottospazio proiettivo** S di $\mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$S = \pi(H \setminus \{0\}), \text{ per } H \text{ sottospazio vettoriale di } V.$$

Osservazione 1.22.

Dalla definizione segue che un sottospazio proiettivo è uno spazio proiettivo.

Più precisamente

$$\pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H).$$

Definizione 1.23 (Iperpiano proiettivo).

Un **iperpiano** di $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo S di $\mathbb{P}(V)$ tale che $\dim S = \dim \mathbb{P}(V) - 1$.

Proposizione 1.24 (Corrispondenza tra sottospazi proiettivi e vettoriali).

Se S è un sottospazio proiettivo come sopra abbiamo che $\pi^{-1}(S) = H \setminus \{0\}$.

In particolare abbiamo una bigezione tra i sottospazi vettoriali di V e i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$

$$\begin{array}{ccc} \{ssp \text{ vett. di } V\} & \longleftrightarrow & \{ssp \text{ prj. di } \mathbb{P}(V)\} \\ H & \longmapsto & \pi(H \setminus \{0\}) \\ \pi^{-1}(S) \cup \{0\} & \longleftarrow & S \end{array}$$

Dimostrazione.

Osserviamo che

$$\pi^{-1}(S) = \bigcup_{[v] \in S} \pi^{-1}([v]) = \bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v]).$$

Procediamo per doppia inclusione. Dato che $\pi(v) = [v]$ abbiamo che $v \in \pi^{-1}([v])$, quindi

$$\bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v]) \supseteq H \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che $\pi^{-1}([v]) = \{w \mid [w] = [v]\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$, quindi $\forall w \in \pi^{-1}([v])$ abbiamo che $w = \lambda v \in H \setminus \{0\}$. Allora abbiamo anche

$$\bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v]) \subseteq H \setminus \{0\}.$$

□

Osservazione 1.25 (Grassmaniane proiettive (NON DATA DURANTE IL CORSO)).

La corrispondenza appena mostrata si comporta bene con le dimensioni, cioè $\dim \mathbb{P}(H) = \dim H - 1$ e $\dim \pi(S)^{-1} \cup \{0\} = \dim S + 1$. Questo ci dice che

$$Gr_k(\mathbb{P}(V)) \cong Gr_{k+1}(V)$$

dove $Gr_k(\mathbb{P}(V))$ è definito in modo analogo alle grassmanniane per spazi vettoriali ma considerando sottospazi proiettivi.

Consideriamo adesso l'intersezione e la somma di sottospazi proiettivi.

Proposizione 1.26 (Sottospazi proiettivi sono stabili per intersezione).
 Siano S_i , $i \in I$ sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. Si ha che

$$\bigcap_{i \in I} S_i \text{ è un sottospazio proiettivo di } \mathbb{P}(V).$$

Dimostrazione.

Sia H_i il sottospazio di V tale che $S_i = \mathbb{P}(H_i)$.

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} S_i &= \bigcap_{i \in I} \pi(H_i \setminus \{0\}) = \{[v] \mid \forall i \in I, [v] \in \pi(H_i \setminus \{0\})\} = \\ &= \{[v] \mid \forall i \in I, \exists w_i \in H_i \setminus \{0\} : [w_i] = [v]\} = \\ &= \{[v] \mid \forall i \in I, v \in H_i \setminus \{0\}\} = \pi \left(\bigcap_{i \in I} (H_i \setminus \{0\}) \right) = \\ &= \pi \left(\left(\bigcap_{i \in I} H_i \right) \setminus \{0\} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} H_i \right). \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.27.

$$\mathbb{P}(V) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(V \cap W).$$

Come per gli spazi vettoriali, l'unione di sottospazi proiettivi non è in generale un sottospazio proiettivo. Definiamo allora una somma.

Definizione 1.28 (Sottospazio proiettivo generato).

Sia $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$, il **sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ generato da A** è il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ contenente A e viene indicato con $L(A)$.

$$L(A) = \bigcap_{\substack{S \text{ ssp. prj.} \\ A \subseteq S}} S.$$

L'intersezione non è vuota perché $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di se stesso.

Osservazione 1.29.

La definizione si estende ad una somma tra sottospazi proiettivi considerando il generato dell'unione

$$L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2).$$

Proposizione 1.30 (Traduzione tra somme di proiettivi e vettoriali).

Se $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$ per H_1, H_2 sottospazi di V abbiamo che

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2).$$

Dimostrazione.

Procediamo per doppia inclusione.

⊆) Dato che $H_1 \subseteq H_1 + H_2$ abbiamo che

$$S_1 = \mathbb{P}(H_1) = \pi(H_1 \setminus \{0\}) \subseteq \pi((H_1 + H_2) \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H_1 + H_2).$$

Analogamente $S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$. Abbiamo quindi che $\mathbb{P}(H_1 + H_2)$ è un sottospazio proiettivo che contiene S_1 e S_2 , quindi per la minimalità del generato

$$L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2).$$

\supseteq) Essendo $L(S_1, S_2)$ un sottospazio proiettivo esiste un sottospazio H di V tale che $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H)$. Abbiamo quindi che $H = \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\}$.

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) \implies H_1 = \pi^{-1}(S_1) \cup \{0\} \subseteq \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\} = H.$$

Analogamente $H_2 \subseteq H$, quindi $H_1 + H_2 \subseteq H$, da cui

$$\mathbb{P}(H_1 + H_2) \subseteq \mathbb{P}(H) = L(S_1, S_2).$$

□

Proposizione 1.31 (Trasformazioni proiettive rispettano i generati).

Dato $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ e f una trasformazione proiettiva abbiamo che

$$f(L(S)) = L(f(S)).$$

Dimostrazione.

Siano $H = \pi^{-1}(S)$ e φ tale che $f = [\varphi]$. Osserviamo che $f(S) = f(\pi(H)) = \pi(\varphi(H))$

$$\begin{aligned} f(L(S)) &= f(\pi(\text{Span}(H) \setminus \{0\})) = \pi(\varphi(\text{Span}(H) \setminus \{0\})) = \\ &= \pi(\text{Span}(\varphi(H)) \setminus \{0\}) = \pi(\text{Span}(\pi^{-1}(f(S))) \setminus \{0\}) = \\ &= L(f(S)). \end{aligned}$$

□

Vediamo ora come generalizzare la formula di Grassmann.

Teorema 1.32 (Formula di Grassmann proiettiva).

Dati S_1, S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ abbiamo che

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2.$$

Dimostrazione.

Siano H_1 e H_2 sottospazi vettoriali di V tali che $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$. Per la formula di Grassmann vettoriale abbiamo che

$$\dim H_1 + H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$$

$$\dim \mathbb{P}(H_1 + H_2) + 1 = \dim \mathbb{P}(H_1) + 1 + \dim \mathbb{P}(H_2) + 1 - \dim \mathbb{P}(H_1 \cap H_2) - 1$$

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2.$$

□

Corollario 1.33 (Criterio per intersezione non vuota).

Se S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi tali che $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ allora $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Dimostrazione.

Calcoliamo la dimensione

$$\begin{aligned}\dim S_1 \cap S_2 &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \\ &\geq \dim \mathbb{P}(V) - \dim L(S_1, S_2) \geq 0.\end{aligned}$$

Dato che $\dim \emptyset = -1$ abbiamo che $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. \square

Osservazione 1.34.

Sui piani proiettivi non esistono “rette parallele”. Più precisamente, date r_1, r_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ e $\dim r_1 = \dim r_2 = 1$ abbiamo che $r_1 = r_2$ o $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ con P punto proiettivo.

Dimostrazione.

Supponiamo $r_1 \neq r_2$, da cui $\dim L(r_1, r_2) = 2$. La tesi segue dal seguente calcolo:

$$\dim r_1 \cap r_2 = \dim r_1 + \dim r_2 - \dim L(r_1, r_2) = 1 + 1 - 2 = 0,$$

ovvero $r_1 \cap r_2$ è un punto proiettivo. \square

1.1.4 Riferimenti proiettivi

Estendiamo i parallelismi con gli spazi vettoriali cercando un equivalente per indipendenza lineare e basi.

Definizione 1.35 (Punti indipendenti).

Siano $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$, essi sono **indipendenti** se scelti $v_1, \dots, v_k \in V$ tali che $[v_i] = P_i$ allora v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti.

La definizione è indipendente dai rappresentanti scelti, infatti per $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ abbiamo che

$$v_1, \dots, v_k \text{ lin. indipendenti} \iff \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_k v_k \text{ lin. indipendenti.}$$

Definizione 1.36 (Posizione generale).

Dati P_1, \dots, P_k essi sono in **posizione generale** se ogni sottoinsieme di essi costituito da h punti distinti con $h \leq n + 1$ è indipendente.

Osservazione 1.37.

Se $k \leq n + 1$ allora la definizione coincide con l'indipendenza. Se $k > n + 1$ la definizione è equivalente a richiedere l'indipendenza di tutte le $(n + 1)$ -uple di punti nell'insieme.

Definizione 1.38 (Riferimento proiettivo).

Un **riferimento proiettivo** di $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = n$ è una $(n + 2)$ -upla di punti in posizione generale.

L'ultimo punto nel riferimento viene chiamato **punto unità**, mentre gli altri sono detti **punti fondamentali**.

Definizione 1.39 (Base normalizzata).

Dato $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, una **base normalizzata di V associata a \mathcal{R}** è una base (v_0, \dots, v_n) tali che

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, [v_i] = P_i \text{ e } P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n].$$

Teorema 1.40 (Esistenza e unicità della base normalizzata).

Dato $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ abbiamo che $\exists \mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ base normalizzata.

Se $\mathcal{B}' = \{u_0, \dots, u_n\}$ è una base normalizzata di \mathcal{R} abbiamo inoltre che $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $u_i = \lambda v_i$.

Dimostrazione.

Siano $w_0, \dots, w_{n+1} \in V$ tali che $[w_i] = P_i$ per $i \in \{0, \dots, n, n+1\}$. Essendo \mathcal{R} un riferimento proiettivo, w_0, \dots, w_n sono $n+1$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione $n+1$, quindi sono una base. Esistono quindi $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tali che $w_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i w_i$. Osserviamo che $\lambda_i \neq 0$, altrimenti i vettori $w_0, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_{n+1}$ non sarebbero linearmente indipendenti e quindi \mathcal{R} non sarebbe in posizione generale.

Siano allora $v_i = \lambda_i w_i$ per $i \in \{0, \dots, n\}$ mentre $v_{n+1} = w_{n+1}$. Chiaramente $[v_i] = [w_i] = P_i$ ma stavolta $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n v_i$ per costruzione, ovvero $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ è una base normalizzata associata a \mathcal{R} .

Sia ora $\mathcal{B}' = \{u_0, \dots, u_n\}$ un'altra base normalizzata di \mathcal{R} . Dato che $[u_i] = P_i = [v_i]$ abbiamo che $\exists \mu_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tali che $v_i = \mu_i u_i$. Inoltre abbiamo che

$$\mu_{n+1} \sum_{i=0}^n u_i = \mu_{n+1} u_{n+1} = v_{n+1} = \sum_{i=0}^n v_i = \sum_{i=0}^n \mu_i u_i,$$

da cui

$$0 = \sum_{i=0}^n (\mu_i - \mu_{n+1}) u_i.$$

Essendo u_0, \dots, u_n una base abbiamo per indipendenza lineare che $\forall i, \mu_i = \mu_{n+1}$, ovvero \mathcal{B}' e \mathcal{B} coincidono a meno di un fattore invertibile. \square

Osservazione 1.41.

Una differenza sostanziale tra la geometria proiettiva e l'algebra lineare è che non è possibile estendere riferimenti proiettivi di sottospazi proiettivi a riferimenti di sottospazi che li estendono.

Se $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ è un riferimento proiettivo di S sottospazio proiettivo di H osserviamo che \mathcal{R} non sono punti in posizione generale letti come punti di H . Infatti se la dimensione aumenta anche solo di 1 è necessario che le $(n+2)$ -uple di punti siano indipendenti ma da come sappiamo dalla definizione di base normalizzata il punto unità si scrive come somma dei punti fondamentali passando ad una base normalizzata.

Possiamo finalmente dare un criterio di uguaglianza tra trasformazioni proiettive.

Teorema 1.42 (Trasformazioni proiettive sono univocamente determinate dal valore su un riferimento).

Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ trasformazioni proiettive indotte da φ e ψ rispettivamente. Sia \mathcal{R} un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\varphi = \lambda \psi$;
2. $f = g$;

3. $\forall P \in \mathcal{R}, f(P) = g(P)$.

Dimostrazione.

1 \implies 2) Calcolando

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g([v]).$$

2 \implies 3) Ovvio perché $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}(V)$.

3 \implies 1) Fissiamo una base normalizzata $\{v_0, \dots, v_n\}$ associata a \mathcal{R} . Sappiamo che

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)],$$

quindi $\exists \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tali che $\varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i)$.

Consideriamo cosa succede rispetto al punto unità:

$$\begin{aligned} \varphi(v_{n+1}) &= \lambda_{n+1} \psi(v_{n+1}) \\ \lambda_{n+1} \sum \psi(v_i) &= \sum \varphi(v_i) = \sum \lambda_i \psi(v_i) \\ 0 &= \sum (\lambda_i - \lambda_{n+1}) \psi(v_i). \end{aligned}$$

Essendo ψ iniettiva, $\psi(v_0), \dots, \psi(v_n)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\forall i$ troviamo $\lambda_i = \lambda_{n+1}$.

Osserviamo quindi che $\lambda_{n+1} \psi$ e φ coincidono su $\{v_0, \dots, v_n\}$, che è una base, dunque $\varphi = \lambda_{n+1} \psi$. \square

Corollario 1.43.

$$\mathbb{P}GL(V) \cong GL(V)/N$$

dove $N = \{\lambda id \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \triangleleft GL(V)$

Dimostrazione.

Consideriamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}GL(V) \\ \varphi & \longmapsto & [\varphi] \end{array}$$

Essa è un omomorfismo, è surgettiva per costruzione e se $[\varphi] = id_{\mathbb{P}(V)} = [id_V]$ abbiamo che $\varphi = \lambda id_V$ per il teorema sopra. In altri termini il nucleo dell'omomorfismo è N . La tesi segue applicando il primo teorema di isomorfismo. \square

Notazione 1.44 (Proiettività standard).

Le proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ formano un gruppo che denotiamo $\mathbb{P}GL(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K})$.

L'ultimo $n + 1$ corrisponde alla taglia delle matrici che rappresenteranno le proiettività, non la dimensione dello spazio su cui agiscono.

Concludiamo la sezione introducendo un teorema che ci permette di identificare trasformazioni proiettive definendole su un riferimento.

Teorema 1.45 (Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive).

Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi su \mathbb{K} tali che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$. Fissiamo $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ e $\mathcal{R}' = (P'_0, \dots, P'_{n+1})$ riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente. Si ha che esiste un'unica trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che $\forall i \in \{0, \dots, n+1\}, f(P_i) = P'_i$.

Dimostrazione.

Osserviamo che l'unicità discende dai criteri di uguaglianza per trasformazioni proiettive mostrati prima (1.42). Infatti se f e f' soddisfano le ipotesi allora coincidono su \mathcal{R} .

Mostriamo ora l'esistenza. Siano $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_0, \dots, w_n\}$ basi normalizzate associate a \mathcal{R} e \mathcal{R}' rispettivamente. Sia $\varphi : V \rightarrow W$ la mappa lineare tale che $\forall i, \varphi(v_i) = w_i$. Osserviamo che φ è iniettiva perché ha rango massimo, dunque ha senso porre $f = [\varphi]$. Per costruzione abbiamo

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = P'_i$$

per i punti fondamentali di \mathcal{R} e \mathcal{R}' , basta controllare il punto unità:

$$f(P_{n+1}) = f([v_0 + \dots + v_n]) = [\varphi(v_0 + \dots + v_n)] = [w_0 + \dots + w_n] = P'_{n+1}.$$

□

1.1.5 Coordinate omogenee

Come per il caso vettoriale, è spesso utile ricorrere a un sistema di coordinate. Per capire come definirle studiamo il caso di $\mathbb{P}^n(K)$. Per definizione abbiamo

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \{[(x_0, \dots, x_n)], \text{ con entrate non tutte nulle}\}.$$

Definizione 1.46 (Riferimento proiettivo canonico).

Il **riferimento standard (o canonico)** di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è il riferimento proiettivo che ha come base normalizzata la base canonica di \mathbb{K}^{n+1} .

Affermiamo che $[(x_0, \dots, x_n)]$ ha **coordinate omogenee** $[x_0, \dots, x_n]$ o $[x_0 : \dots : x_n]$ rispetto al riferimento canonico di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Osservazione 1.47.

Il riferimento proiettivo standard consiste dei punti con coordinate omogenee:

$$[1 : 0 : \dots : 0], [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \dots, [0 : \dots : 0 : 1], [1 : 1 : \dots : 1].$$

Cerchiamo ora di definire le coordinate omogenee per un qualsiasi spazio proiettivo.

Definizione 1.48 (Coordinate omogenee).

Fissiamo $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Dato $P \in \mathbb{P}(V)$ le sue **coordinate omogenee** rispetto a \mathcal{R} sono date da una delle seguenti equivalenti definizioni:

- Se $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è l'unico isomorfismo proiettivo che porta \mathcal{R} nel riferimento proiettivo canonico di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ allora le coordinate omogenee di P sono $f(P)$.
- Se $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ è una base normalizzata associata a \mathcal{R} e $P = [v]$ consideriamo la combinazione lineare $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$. Le coordinate omogenee di P rispetto a \mathcal{R} sono $[a_0 : \dots : a_n]$.

Come per il caso vettoriale, possiamo rappresentare le trasformazioni proiettive con matrici e sottospazi proiettivi come luoghi di zeri di equazioni.

Definizione 1.49 (Matrice associata a isomorfismo proiettivo).

Sia $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ un isomorfismo proiettivo e siano $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente. Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ le relative basi normalizzate. Se φ è una mappa lineare che induce f allora f è **rappresentata** da $M = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n+1, \mathbb{K})$.

Osservazione 1.50 (Prodotto matrice-coordinate omogenee).

Dati $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$, $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$, $f = [\varphi]$, M una matrice che rappresenta f , $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ un riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente con \mathcal{B} e \mathcal{B}' basi normalizzate, se indichiamo il passaggio a coordinate omogenee rispetto a \mathcal{R} con $[\cdot]_{\mathcal{R}}$ e il passaggio a coordinate rispetto a \mathcal{B} con $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ (similmente per \mathcal{R}' e \mathcal{B}') si ha che

$$\begin{aligned} [f(P)]_{\mathcal{R}'} &= [[\varphi(v)]]_{\mathcal{R}'} = [[[\cdot]_{\mathcal{B}'}^{-1}(M[v]_{\mathcal{B}})]]_{\mathcal{R}'} = \\ &= [[[\cdot]_{\mathcal{R}'}^{-1}(M[v]_{\mathcal{B}})]]_{\mathcal{R}'} = \\ &= [M[v]_{\mathcal{B}}]. \end{aligned}$$

Notazione 1.51.

Se M è una matrice, $P \in \mathbb{P}(V)$ con $P = [v]$, \mathcal{R} è un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e \mathcal{B} è una sua base normalizzata poniamo

$$M[P]_{\mathcal{R}} = [M][P]_{\mathcal{R}} \doteq [M[v]_{\mathcal{B}}].$$

Definizione 1.52 (Equazioni cartesiane proiettive).

Dato S un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ sia W il sottospazio vettoriale di V tale che $S = \mathbb{P}(W)$. Fissato un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ individuiamo univocamente una base normalizzata di V , quindi W è esprimibile come luogo di zeri di $\dim V - \dim W$ equazioni. Chiamiamo queste le **equazioni cartesiane per S rispetto a \mathcal{R}** .

Osservazione 1.53.

Con le notazioni appena usate, il numero di equazioni si esprime in termini di S e $\mathbb{P}(V)$ come

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim S = \dim V - \dim W$$

1.2 Spazi proiettivi estendono gli spazi affini

Approfondiamo la geometria di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ come oggetto n -dimensionale che “contiene” \mathbb{K}^n .

1.2.1 Carte affini

Consideriamo cosa succede quando fissiamo una coordinata proiettiva a 0

Definizione 1.54 (Iperpiano coordinato).

Dato $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ costruiamo per ogni indice $i \in \{0, \dots, n\}$ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$$H_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0\}.$$

Chiamiamo H_i l' i -esimo **iperpiano coordinato**.

Osservazione 1.55.

Considerati come spazi proiettivi

$$H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}).$$

Definizione 1.56 (Carta affine).

Definiamo l' i -esima **carta affine** come

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i.$$

Proposizione 1.57 (Le carte affini sono "isomorfe" all'affine).

Esiste una bigezione naturale tra U_i e \mathbb{K}^n per ogni i .

Dimostrazione.

Definiamo la seguente mappa

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & U_i \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & [x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n] \end{array}$$

La mappa è chiaramente ben definita. Poniamo ora la seguente definizione

$$J_i^{-1} : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{array}$$

Anche questa è ben definita in quanto se $[x_1, \dots, x_n] \in U_i$ allora $x_i \neq 0$, inoltre cambiando rappresentante per le coordinate omogenee troviamo la stessa n -upla in \mathbb{K}^n

$$\begin{aligned} J_i^{-1}([\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]) &= \left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_{i-1}}{\lambda x_i}, \frac{\lambda x_{i+1}}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i} \right) = \\ &= \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Possiamo ora verificare con relativa facilità che $J_i \circ J_i^{-1} = id_{U_i}$ e che $J_i^{-1} \circ J_i = id_{\mathbb{K}^n}$:

$$\begin{aligned} J_i(J_i^{-1}([x_0 : \dots : x_n])) &= J_i \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = \\ &= \left[\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right] = \\ &= [x_0 : \dots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \dots : x_n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_i^{-1}(J_i(x_1, \dots, x_n)) &= J_i^{-1}([x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]) = \\ &= \left(\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_{i-1}}{1}, \frac{x_{i+1}}{1}, \dots, \frac{x_n}{1} \right) = \\ &= (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

□

Definizione 1.58 (Carta affine).

La bigezione $J_i : \mathbb{K}^n \rightarrow U_i$ si chiama i -esima **carta affine**.¹

¹Purtroppo sia le mappe che gli insiemi si chiamano carte affini. Tecnicamente parlando la carta affine sarebbe la mappa ma questa distinzione è quasi sempre irrilevante dato che viene vista quasi come una inclusione piuttosto che una funzione.

L'esistenza della carta affine ci permette di dividere gli spazi proiettivi in due parti²

$$\begin{array}{rcc} \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) & = & U_0 \quad \sqcup \quad H_0 \\ & & \cong \quad \quad \cong \\ & & \mathbb{K}^n \quad \quad \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \end{array}$$

Definizione 1.59 (Punti propri e impropri).

I punti di $U_0 \cong \mathbb{K}^n$ si chiamano **punti propri** o **affini**, mentre i punti di H_0 si chiamano **punti impropri** o **all'infinito**.

Proposizione 1.60 (Parte affine).

Sia K un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ non contenuto in H_0 . Allora $J_0^{-1}(K \cap U_0) \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine della stessa dimensione di K che chiamiamo **parte affine** di K .

Dimostrazione.

Sia $k = \dim K$. Sappiamo che K è luogo di zeri di un sistema lineare omogeneo di rango $n - k$.

$$\begin{cases} a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Un punto $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ appartiene a $J_0^{-1}(K \cap U_0)$ se e solo se $[1 : x_1 : \cdots : x_n] \in K \cap U_0$ (ma dato che $x_0 = 1$ basta richiedere $[1 : x_1 : \cdots : x_n] \in K$) ovvero

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = -a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n}x_n = -a_{n-k,0} \end{cases}$$

Il rango di questo sistema (non omogeneo) continua ad essere $n - k$. Dato che $K \not\subseteq H_0$ abbiamo che $J_0^{-1}(U_0 \cap K)$ non è vuoto e quindi il sistema ha una soluzione. Per Rouché-Capelli le soluzioni del sistema sono uno spazio affine di \mathbb{K}^n di dimensione $n - (n - k) = k$. \square

Proposizione 1.61 (Chiusura proiettiva).

Sia $Z \neq \emptyset$ un sottospazio affine di \mathbb{K}^n . Allora Z è la parte affine di un unico sottospazio proiettivo \bar{Z} di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Inoltre $\bar{Z} \not\subseteq H_0$ e ha la stessa dimensione di Z . Chiamiamo \bar{Z} la **chiusura proiettiva** di Z .

Dimostrazione.

Sia $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottospazio affine di dimensione k . Sappiamo che Z è descritto da un sistema lineare $Ax = b$ con $\text{rk } A = \text{rk}(A \mid b) = n - k$. Sia \bar{Z} il sottospazio proiettivo che ha equazioni cartesiane $(-b \mid A)y = 0$. Dato che $\text{rk}(-b \mid A) = n - k$ il secondo sistema individua un sottospazio vettoriale di \mathbb{K}^{n+1} di dimensione $(n + 1) - (n - k) = k + 1$ e quindi un sottospazio proiettivo

²ovviamente quale carta scegliamo non è rilevante. Per convenzione di solito scegliamo U_0 ma alcuni preferiscono U_n .

di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ di dimensione k . La parte affine di \bar{Z} è $J_0^{-1}(\bar{Z} \cap U_0)$ ed è individuata dal sistema $Ax = b$, ovvero come volevamo la parte affine di \bar{Z} è Z .

Mostriamo l'unicità per assurdo. Se Z' e \bar{Z} sono due chiusure proiettive di Z distinte abbiamo che $\dim Z' = \dim Z = \dim \bar{Z}$ e quindi $\dim(Z' \cap \bar{Z}) < \dim Z$, quindi

$$\dim J_0^{-1}(U_0 \cap (Z' \cap \bar{Z})) < \dim Z$$

che è assurdo perché $J_0^{-1}(U_0 \cap (Z' \cap \bar{Z})) = Z$ per quanto detto. \nexists □

Dalle due proposizioni precedenti vediamo che esiste una bigezione naturale tra i k -sottospazi affini di \mathbb{K}^n e i k -sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ non contenuti in H_0 .

Definizione 1.62 (Polinomio omogeneo).

Un polinomio $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è **omogeneo** di grado d se tutti i monomi a coefficienti non nulli di p hanno grado d .

Osservazione 1.63.

La mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathbb{K}_{\deg p}[x_0, \dots, x_1] \\ p(x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_0^{\deg p} p(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \end{aligned}$$

è detta **omogenizzazione** e se p ha grado d allora il suo omogenizzato è un polinomio omogeneo di grado d . Questa operazione corrisponde a “mettere tante x_0 quanto basta affinché tutti i termini abbiano lo stesso grado”.

Osservazione 1.64.

Se Z è un iperpiano di \mathbb{K}^n di equazione $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = b$ allora la sua chiusura proiettiva $\bar{Z} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha equazione $-bx_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$. In generale se un sottospazio è dato da un sistema di equazioni, la sua chiusura è data dal sistema di queste stesse equazioni ma omogeneizzato.

Osservazione 1.65.

Solo gli zeri di polinomi omogenei descrivono luoghi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dato che altrimenti quando scaliamo le indeterminate otterremmo una potenza diversa del fattore per monomi di grado diverso.

Prendere la chiusura proiettiva di spazi affini in genere aggiunge dei punti allo spazio. Diamo un nome a questi punti:

Definizione 1.66 (Punti all'infinito di sottospazi vettoriali).

Se Z è un sottospazio affine di \mathbb{K}^n i **punti all'infinito** di Z sono i punti di $\bar{Z} \cap H_0$.

Ma perché li chiamiamo “all'infinito”?

La proposizione seguente ci fornisce una intuizione.

Proposizione 1.67 (Rette si incontrano all'infinito se e solo se sono parallele).

Siano r, s due rette affini in \mathbb{K}^n . Allora r, s hanno lo stesso punto all'infinito se e solo se sono parallele.

Dimostrazione.

Sia $r = \{p + tv, t \in \mathbb{K}\}$. Osserviamo che la chiusura proiettiva \bar{r} di r è descritta dall'equazione parametrica $\{[t_1 : t_1 p + t_2 v], t_1, t_2 \in \mathbb{K}\}$ (con t_1, t_2 non entrambi nulli). Con $[\cdot : v]$ intendiamo $[\cdot : v_1 : v_2 : \dots : v_n]$.

Per cercare i punti all'infinito cerco i punti $[t_1, t_1 p + t_2 v]$ con $x_0 = 0$, ovvero $t_1 = 0$ (e $t_2 \neq 0$). Troviamo quindi $[0 : t_2 v] = [0 : v]$. Abbiamo quindi che una retta affine di giacitura $\text{Span}(v)$ ha un unico punto all'infinito dato da $[0 : v]$. Abbiamo quindi che due rette di giacitura $\text{Span}(v)$ e $\text{Span}(w)$ hanno lo stesso punto all'infinito se e solo se $[0 : v] = [0 : w] \iff v = \lambda w$ ovvero $\text{Span}(v) = \text{Span}(w)$, cioè le rette sono parallele. \square

Vediamo quindi che H_0 è in bigezione con le direzioni in \mathbb{K}^n , ovvero

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \{\text{direzioni di } \mathbb{K}^n\}.$$

1.3 Approfondimento sulle proiettività

1.3.1 Prospettività

Andiamo ora a studiare ciò per cui la geometria proiettiva è nata, ovvero la prospettiva.

Definizione 1.68 (Prospettività).

Siano r, s rette distinte di un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Sia $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$ e definiamo

$$\pi_O : \begin{array}{ccc} r & \longrightarrow & s \\ p & \longmapsto & L(O, p) \cap s \end{array}$$

π_O è detta **prospettività** di centro O .

Proposizione 1.69 (Le prospettività sono ben definite e sono trasformazioni proiettive).

La prospettiva di centro O è una trasformazione proiettiva ben definita.

Dimostrazione.

Dato che $O \notin r$ e $p \in r$ abbiamo che $L(O, p)$ è una retta e questa non coincide con s perché $O \notin s$. Abbiamo quindi che $L(O, p) \cap s$ è un punto per questioni dimensionali e quindi π_O è ben definita come mappa.

Siano V_r e V_s sottospazi vettoriali di V tali che $r = \mathbb{P}(V_r)$ e $s = \mathbb{P}(V_s)$. Per dimostrare la tesi dobbiamo trovare una mappa lineare da V_r a V_s che induce π_O . Sia $A = r \cap s$ e scegliamo $B \in r \setminus \{A\}$ e $C \in s \setminus (\{A\} \cup (L(B, O) \cap s))$ (esiste sempre perché $B \in L(B, O)$ e $B \in r \setminus s$ e quindi $B \notin s$, dunque $L(B, O) \neq s$ e togliere due punti ad una retta proiettiva non la esaurisce). Consideriamo il riferimento proiettivo A, B, C, O (che abbreviamo \mathcal{R}), che letto in questo ordine ha coordinate omogenee

$$A = [1 : 0 : 0], B = [0 : 1 : 0], C = [0 : 0 : 1], O = [1 : 1 : 1],$$

perciò $r = L(A, B) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_2 = 0\} = \{[x_0 : x_1 : 0]\}$ e $s = L(A, C) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_1 = 0\} = \{[x_0 : 0 : x_2]\}$. Consideriamo allora i seguenti isomorfismi proiettivi

$$\pi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) & \longrightarrow & r \\ [a : b] & \longmapsto & [a : b : 0] \end{array} \quad \pi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) & \longrightarrow & s \\ [c : d] & \longmapsto & [c : 0 : d] \end{array}$$

e fissiamo su r e s queste coordinate omogenee.

Cerchiamo le coordinate di $\pi_O(p)$ per $p \in r$. Dato che $p \in r$ abbiamo che $p = [a : b : 0]$ da cui

$$\begin{aligned} L(O, p) &= L([1 : 1 : 1], [a : b : 0]) = \\ &= \{[t_1 + at_2 : t_1 + bt_2 : t_1]\}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che $\pi_O(p) = L(O, p) \cap s$ è dato ponendo $t_1 + bt_2 = 0$ da cui $[at_2 - bt_2 : 0 : -bt_2] = [a - b : 0 : -b]$.

Vediamo quindi che, se poniamo su r il riferimento $\mathcal{R}_r = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [1 : 1 : 0]\}$ e su s il riferimento $\mathcal{R}_s = \{[1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : 0 : 1]\}$ (dove queste coordinate omogenee sono rispetto a \mathcal{R}), allora π_O è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, infatti in quei riferimenti per quanto appena mostrato abbiamo che $[a : b] \mapsto [a - b : -b]$. Più esplicitamente

$$\begin{aligned} \pi_O(p) &= [\cdot]_{\mathcal{R}_s}^{-1}([\pi_O([\cdot]_{\mathcal{R}_r}^{-1}([a : b]))]_{\mathcal{R}_s}) = [\cdot]_{\mathcal{R}_s}^{-1}([a - b : -b]) = \\ &= [\cdot]_{\mathcal{R}_s}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato una matrice associata ad una mappa lineare che induce π_O , rendendo la prospettività una trasformazione proiettiva. \square

Proviamo a dare una caratterizzazione delle prospettività

Teorema 1.70 (Caratterizzazione delle prospettività).

Siano r, s rette distinte di un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ e sia $A = r \cap s$. Data $f : r \rightarrow s$ trasformazione proiettiva abbiamo che f è una prospettività se e solo se $f(A) = A$.

Dimostrazione.

\implies) Per semplice calcolo

$$\pi_O(A) = L(O, A) \cap s = A.$$

\impliedby) Siano $B \in r \setminus \{A\}$, $C = f(B)$ e $B' \in r \setminus \{A, B\}$, $C' = f(B')$. Poniamo $O = L(B, C) \cap L(B', C')$, il quale è ben definito perché se per assurdo le rette coincidessero allora $B' \in L(B, C) \cap L(B', C')$, da cui $L(B, C) = r$ ma da questo troveremmo $C \in r \cap s$ ovvero $C = A$. Analogamente troveremmo $C' = A$ che è assurdo perché $B \neq B'$ e f è iniettiva. \dagger

Per costruzione

$$\begin{aligned} \pi_O(A) &= L(O, A) \cap s = A = f(A), \\ \pi_O(B) &= L(O, B) \cap s = L(B, C) \cap s = C = f(B) \\ \pi_O(B') &= L(O, B') \cap s = L(B', C') \cap s = C' = f(B'). \end{aligned}$$

Quindi f e π_O coincidono su un riferimento proiettivo di r e quindi sono la stessa trasformazione proiettiva (1.42). \square

1.3.2 Corrispondenza tra Affinità e Proiettività

Proposizione 1.71 (Affinità come proiettività).

Il gruppo delle affinità $Aff(\mathbb{K}^n)$ è isomorfo a $G < \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K})$, dove

$$G = \{f \in \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K}) \mid f(H_0) = H_0\}.$$

Dimostrazione.

Chiaramente G è un gruppo.

Sia $f \in G$ e fissiamo $M \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ che rappresenta f . Evidenziando la prima riga e la prima colonna abbiamo

$$M = \begin{pmatrix} d & c^\top \\ b & A \end{pmatrix},$$

dove $d \in \mathbb{K}$, $b, c \in \mathbb{K}^n$ e $A \in M(n, \mathbb{K})$.

Affermiamo che M fissa H_0 se e solo se $c = 0$, infatti è necessario che

$$M[0 : a_1 : \cdots : a_n] = [0 : b_1 : \cdots : b_n]$$

per qualsiasi a_1, \dots, a_n , quindi, leggendo la prima entrata di $M[0 : a_1 : \cdots : a_n]$, abbiamo $\sum a_i c_i = 0$ per qualsiasi a_i e l'unico modo per verificare questa condizione è che $c = 0$. Oltre ad essere necessaria la condizione è chiaramente sufficiente perché $MH_0 \subset H_0$ e f è iniettiva. La matrice ha quindi la forma

$$M = \begin{pmatrix} d & 0 \\ b & A \end{pmatrix},$$

con $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $A \in GL_n(\mathbb{K})$ dato che per ipotesi $M \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$. Essendo $d \neq 0$ e dato che M rappresenta una proiezione, scalare la matrice di d^{-1} non cambia f , dunque consideriamo senza ledere generalità

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}.$$

Definiamo ora una mappa da G a $Aff(\mathbb{K}^n)$ nell'unico modo naturale:

$$\phi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Aff(\mathbb{K}^n) \\ f & \longmapsto & J_0^{-1} \circ f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 \end{array}$$

Mostriamo che ϕ è l'isomorfismo cercato:

Buona def.)

La formula usata ha senso perché $f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} = f|_{U_0}$ ha valori in U_0 , infatti per iniettività $f(H_0) = H_0 \iff f(U_0) = U_0$.

Mostriamo che $\phi(f)$ è effettivamente una affinità: consideriamo un generico vettore $v \in \mathbb{K}^n$ e mostriamo che $\phi(f)$ agisce su v come una affinità

$$\begin{aligned} \phi(f)(v) &= \phi(f)((a_1, \dots, a_n)) = \\ &= J_0^{-1}(f([1 : a_1, \dots, a_n])) = \\ &= J_0^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}\right]\right) = \\ &= J_0^{-1}([1 : Av + b]) = Av + b. \end{aligned}$$

ϕ invertibile) Data una proiezione $f \in G$ rappresentata da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}$$

abbiamo visto che $\phi(f)(x) = Ax + b = g(x) \in Aff(\mathbb{K}^n)$. Per ricostruire f basta quindi considerare la classe della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g(0) & C \end{pmatrix}$$

dove

$$C = (g(e_1) - g(0) \mid \cdots \mid g(e_n) - g(0)).$$

ϕ omomorfismo) Procediamo per verifica diretta:

$$\begin{aligned} \phi(g \circ f) &= J_0^{-1} \circ g \circ f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 = \\ &= J_0^{-1} \circ g|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 = \\ &= J_0^{-1} \circ g|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 \circ J_0^{-1} \circ f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 = \\ &= \phi(g) \circ \phi(f). \end{aligned}$$

□

1.3.3 Trasformazioni lineari fratte

Definizione 1.72 (Infinito).

Per quanto detto sappiamo che $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0 \cong \mathbb{K} \cup \{[0, 1]\}$. Definiamo allora $\infty \doteq [0, 1]$. Con questa identificazione

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

Consideriamo le proiettività su $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$: esse sono rappresentate dalle matrici $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{K})$.

Definizione 1.73 (Trasformazione lineare fratta).

Una mappa della forma

$$z \mapsto \frac{c + dz}{a + bz}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ e $ad - bc \neq 0$ è detta **trasformazione lineare fratta**.

Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ queste mappe si chiamano anche **trasformazioni di Möbius**.

Osservazione 1.74.

Possiamo definire come una trasformazione lineare fratta agisce su ∞ o restituisce ∞ ponendo

$$-\frac{a}{b} \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto \frac{d}{b}.$$

Proposizione 1.75.

Identificando $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ le proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ corrispondono a trasformazioni lineari fratte.

Dimostrazione.

Una proiettività è rappresentata da una matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{P}GL_2(\mathbb{K}).$$

Vediamo quindi come è definita l'immagine di $z \in \mathbb{K}$ tale che $a + bz \neq 0$ tramite la proiettività f :

$$\begin{aligned} z &\xrightarrow{j_0} [1, z] \xrightarrow{f} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \right] = \\ &= [a + bz, c + dz] = \\ &= \left[1, \frac{c + dz}{a + bz} \right] \xrightarrow{j_0^{-1}} \frac{c + dz}{a + bz}. \end{aligned}$$

Osserviamo dal passaggio intermedio che se $a + bz = 0$ allora troviamo $f(j_0(z)) = [0, 1]$ ovvero $z \mapsto \infty$.

Se volessimo cercare l'immagine di ∞ basterebbe porre $j_0(\infty) \doteq [0, 1]$ da cui troviamo applicando f il punto di coordinate proiettive $[b, d]$ che viene rimappato a d/b come avevamo posto sopra. \square

1.4 Dualità

Definizione 1.76 (Spazio proiettivo duale).

Dato V spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita, definiamo lo **spazio proiettivo duale** di $\mathbb{P}(V)$ come

$$\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}(\text{Hom}(V, \mathbb{K}))$$

Osservazione 1.77.

Dato che $V \cong V^*$ abbiamo che $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V)^*$.

Proposizione 1.78.

La seguente mappa è una bigezione naturale tra il proiettivo duale e gli iperpiani del proiettivo

$$\phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V)^* & \longrightarrow & \{\text{iperpiani in } \mathbb{P}(V)\} \\ [f] & \longmapsto & \mathbb{P}(\ker f) \end{array} .$$

Dimostrazione.

La mappa è ben definita perché se $[f] = [g]$ allora $f = \lambda g$ con $\lambda \neq 0$ e quindi $\ker f = \ker g$.

Dalla seguente catena di implicazioni segue che ϕ è iniettiva³

$$\mathbb{P}(\ker f) = \mathbb{P}(\ker g) \implies \ker f = \ker g \implies f = \lambda g \implies [f] = [g].$$

Infine vediamo che ϕ è surgettiva. Dato un iperpiano H di $\mathbb{P}(V)$ e sapendo che $H = \mathbb{P}(W)$, osservo che W è un iperpiano di V . Consideriamo il funzionale dato dalla proiezione al quoziente $\pi: V \rightarrow V/W \cong \mathbb{K}$. La sua classe è una controimmagine di H , infatti $\phi([\pi]) = \mathbb{P}(\ker \pi) = \mathbb{P}(W) = H$. \square

Definizione 1.79 (Riferimento duale).

Se \mathcal{R} è un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e \mathcal{B} è una sua base normalizzata allora, definendo \mathcal{B}^* la base duale di \mathcal{B} , troviamo un riferimento \mathcal{R}^* che ha come base normalizzata \mathcal{B}^* . \mathcal{R}^* è detto **riferimento duale** di \mathcal{R} e fornisce delle **coordinate omogenee duali** su $\mathbb{P}(V)^*$.

³Ricordiamo che $\ker f = \ker g = K$ per funzionali implica che possiamo completare una base di K a base di V con un solo vettore $v \in V \setminus K$, dunque se $f(v) = \alpha$ e $g(v) = \beta$ vediamo facilmente che $f = (\alpha/\beta)g$.

Osservazione 1.80.

Le coordinate duali del funzionale corrispondente all'iperpiano $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ sono $[a_0 : \dots : a_n]$.

Definiamo allora una mappa che dualizza tutti i sottospazi di $\mathbb{P}(V)$. Sia S un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e sia W tale che $S = \mathbb{P}(W)$. Poniamo $\dim S = k$ e $\dim \mathbb{P}(V) = n$. Allora per $-1 \leq k \leq n$ definisco la mappa⁴

$$\delta_k : \begin{cases} \text{ssp.prj. } S \subseteq \mathbb{P}(V) \\ \dim S = k \\ S \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{matrix} \begin{cases} \text{ssp.prj. } T \subseteq \mathbb{P}(V)^* \\ \dim T = n - k - 1 \\ \mathbb{P}(\text{Ann}(W)) \end{cases}$$

Proposizione 1.81.

δ_k è biunivoca per ogni k .

Dimostrazione.

La mappa è ben definita perché $\dim \text{Ann}W = \dim V - \dim W$. *Iniettività*) Se $\mathbb{P}(\text{Ann}(W_1)) = \mathbb{P}(\text{Ann}(W_2))$ allora $\text{Ann}(W_1) = \text{Ann}(W_2)$ e quindi $W_1 = W_2$. Se non avessimo l'ultima implicazione allora potrei costruire un funzionale tale che $f|_{W_1} = 0$ e $f|_{W_2} \neq 0$.

Surgettività) Dato $T = \mathbb{P}(Z)$ pongo

$$W = \bigcap_{f \in Z} \ker f = \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker z_i$$

dove $\{z_i\}_{i \in \{1, \dots, n-k\}}$ è una base di Z . Osserviamo che $\dim W = n+1 - (n-k) = k+1$ (questo deriva da come si intersecano iperpiani di funzionali base) e per costruzione abbiamo $Z = \text{Ann}(W)$, quindi $\delta_k(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(Z) = T$. \square

Osservazione 1.82.

Per $k = n-1$ vediamo che δ_{n-1} è l'inversa di

$$\phi : \begin{matrix} \mathbb{P}(V)^* & \longrightarrow & \{\text{iperpiani in } \mathbb{P}(V)\} \\ [f] & \longmapsto & \mathbb{P}(\ker f) \end{matrix},$$

invece per $k = 0$ troviamo una corrispondenza tra punti di $\mathbb{P}(V)$ e iperpiani di $\mathbb{P}(V)^*$, che è la situazione inversa rispetto a prima. Questo fatto è legato all'isomorfismo naturale tra V e V^{**} .

Definizione 1.83 (Corrispondenza di dualità).

Definiamo la **corrispondenza di dualità**

$$\delta : \begin{matrix} \{\text{ssp.prj. di } \mathbb{P}(V)\} \\ S \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{matrix} \begin{matrix} \{\text{ssp.prj. di } \mathbb{P}(V)^*\} \\ \delta_{\dim S}(S) \end{matrix}$$

Proposizione 1.84.

Se S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ allora

1. $S_1 \subseteq S_2 \implies \delta(S_2) \subseteq \delta(S_1)$
2. $\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$

⁴Ricordiamo che $\text{Ann}(W) = \{f \in V^* \mid f(W) = 0\}$ e che $\dim \text{Ann}(W) = n - \dim W$.

$$3. \delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2)).$$

Dimostrazione.

Tutte le relazioni sopra discendono dalle proprietà degli annullatori. Siano W_1, W_2 tali che $\mathbb{P}(W_1) = S_1$ e $\mathbb{P}(W_2) = S_2$.

1. Valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} S_1 \subseteq S_2 &\implies W_1 \subseteq W_2 \implies \text{Ann}(W_2) \subseteq \text{Ann}(W_1) \implies \\ &\mathbb{P}(\text{Ann}(W_2)) \subseteq \mathbb{P}(\text{Ann}(W_1)) \implies \\ &\delta(S_2) \subseteq \delta(S_1). \end{aligned}$$

2. Ricordo che $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ e che

$$\text{Ann}(W_1 + W_2) = \text{Ann}(W_1) \cap \text{Ann}(W_2).$$

3. $\text{Ann}(W_1 \cap W_2) = \text{Ann}(W_1) + \text{Ann}(W_2)$, da cui

$$\begin{aligned} L(\delta(S_1), \delta(S_2)) &= \mathbb{P}(\text{Ann}(W_1) + \text{Ann}(W_2)) = \\ &= \mathbb{P}(\text{Ann}(W_1 \cap W_2)) = \delta(\mathbb{P}(W_1 \cap W_2)) = \\ &= \delta(S_1 \cap S_2). \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.85.

Fissando una base, $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V)^*$, quindi posso pensare a δ come funzione tra sottospazi di $\mathbb{P}(V)$.

Viste queste corrispondenze ci è permesso riformulare enunciati tramite il seguente

Teorema 1.86 (Principio di dualità).

Se \mathcal{P} è una proposizione di oggetti di $\mathbb{P}(V)$ allora c'è una proposizione \mathcal{P}^ con lo stesso valore di verità ottenuta da \mathcal{P} scambiando intersezioni con spazi generati e viceversa, invertendo i contenimenti e considerando oggetti della codimensione diminuita di 1 (cioè spazi di dimensione k diventano spazi di dimensione $n - k - 1$).*

Proposizione 1.87.

Tramite la bigezione tra $\mathbb{P}(V)^$ e gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ si ha che per S sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$*

$$\delta(S) = \{H \subset \mathbb{P}(V) \text{ iperpiano t.c. } S \subseteq H\} \subseteq \mathbb{P}(V)^*$$

Dimostrazione.

Ricordiamo che la bigezione è data da $[f] \mapsto \mathbb{P}(\ker f) = H$. Basta quindi notare che, prendendo $\mathbb{P}(W) = S$, abbiamo

$$\begin{aligned} [f] \in \delta(S) = \mathbb{P}(\text{Ann}(W)) &\iff f \in \text{Ann}(W) \setminus \{0\} \iff W \subseteq \ker f \iff \\ &\iff \mathbb{P}(\ker f) \supseteq \mathbb{P}(W) \iff H \supseteq S. \end{aligned}$$

□

Definizione 1.88 (Sistema lineare di iperpiani).

Dato S sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ chiamiamo $\delta(S)$ il **sistema lineare di iperpiani** di $\mathbb{P}(V)$ di **centro** S .

Osservazione 1.89.

Dato che δ è biunivoca ogni sottospazio proiettivo $T \subseteq \mathbb{P}(V)^*$ si scrive come sistema lineare di iperpiani il cui centro è $\delta^{-1}(T)$.

Definizione 1.90 (Fascio di iperpiani).

Una retta proiettiva in $\mathbb{P}(V)^*$ è detta **fascio** di iperpiani.

Definizione 1.91 (Proiettività duale).

Se $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è un isomorfismo proiettivo e $f = [\varphi]$ allora definiamo $f^* = [\varphi^*] : \mathbb{P}(W)^* \rightarrow \mathbb{P}(V)^*$ la **proiettività duale** di f , dove $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ è la mappa lineare duale di φ ⁵.

Osservazione 1.92.

Osserviamo che $f^*(\delta(H)) = \delta(f^{-1}(H))$ per H iperpiano di $\mathbb{P}(W)$. Infatti posto $H = \mathbb{P}(Z)$ abbiamo

$$\begin{aligned} f^*(\delta(H)) &= f^*(\mathbb{P}(\text{Ann}(Z))) = \{f^*([g]) \mid g \in \text{Ann}(Z) \setminus \{0\}\} = \\ &= \{[\varphi^*(g)] \mid g \in \text{Ann}(Z) \setminus \{0\}\} = \{[g \circ \varphi] \mid g \in \text{Ann}(Z) \setminus \{0\}\} = \\ &= \{[g \circ \varphi] \mid g \circ \varphi \in \text{Ann}(\varphi^{-1}(Z)) \setminus \{0\}\} = \mathbb{P}(\text{Ann}(\varphi^{-1}(Z))) = \\ &= \delta(\mathbb{P}(\varphi^{-1}(Z))) = \delta(f^{-1}(\mathbb{P}(Z))) = \\ &= \delta(f^{-1}(H)). \end{aligned}$$

1.5 Birapporto

Sappiamo che dati tre punti su una retta proiettiva ed altri tre punti allineati possiamo definire una proiettività che manda i primi nei secondi.

Per le trasformazioni affini potevamo definire il rapporto semplice di tre punti allineati e questo forniva un invariante per affinità. Purtroppo il rapporto semplice non è invariante per proiettività. Cerchiamo un tale invariante.

Definizione 1.93 (Birapporto).

Dati quattro punti $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ e P_1, P_2, P_3 distinti definiamo il loro **birapporto** come

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

dove $[x_0, x_1]$ sono le coordinate omogenee di P_4 rispetto al riferimento proiettivo (P_1, P_2, P_3) .

Osservazione 1.94.

Possiamo interpretare il birapporto come la coordinata affine di P_4 nella carta U_0 rispetto al riferimento (P_1, P_2, P_3) .

⁵Ricordiamo che data $\varphi : V \rightarrow W$ lineare, la sua mappa duale è data da

$$\varphi^* : \begin{array}{ccc} W^* & \longrightarrow & V^* \\ g & \longmapsto & g \circ \varphi \end{array}$$

Osservazione 1.95.

Se $P_4 = P_1$ allora il birapporto è $0/1 = 0$, se $P_4 = P_2$ abbiamo $1/0 = \infty$ e per $P_4 = P_3$ ricaviamo $1/1 = 1$. Più in generale la mappa

$$\beta(P_1, P_2, P_3, \cdot) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

è una bigezione (per definizione dato che P_4 è libero di avere qualsiasi coordinata omogenea rispetto a (P_1, P_2, P_3)).

Proposizione 1.96 (Calcolo del birapporto).

Se in un riferimento proiettivo fissato abbiamo $P_i = [\lambda_i, \mu_i]$ per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ allora

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}} = \frac{(\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)}{(\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)}$$

Dimostrazione.

Cerchiamo una base normalizzata di (P_1, P_2, P_3) in modo da poter scrivere le coordinate di P_4 . Siano v, w tali che $[v] = P_1, [w] = P_2$, ovvero

$$v = a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \quad w = b \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Per essere una base normalizzata chiediamo

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = v + w = a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

ovvero cerchiamo le soluzioni dell'equazione

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix},$$

che possiamo fare applicando la regola di Cramer:

$$a = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}, \quad b = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix},$$

dove per brevità $A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}$ (sappiamo che $A \neq 0$ perchè $P_1 \neq P_2$). In questa base determiniamo le coordinate x_0 e x_1 di P_4 :

$$\begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = x_0 a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + x_1 b \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Applicando Cramer di nuovo

$$x_0 = \frac{1}{a} \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}, \quad x_1 = \frac{1}{b} \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}},$$

da cui calcolando il rapporto x_1/x_0 troviamo la tesi. \square

Osservazione 1.97.

Se $\lambda_i \neq 0$ per ogni i allora ponendo $z_i = \mu_i/\lambda_i$ troviamo

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} = \frac{\frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1}}{\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}} = \frac{[P_1, P_3, P_4]}{[P_2, P_3, P_4]},$$

ovvero il birapporto è il rapporto di due rapporti semplici.

Corollario 1.98.

Se P_4 è il punto all'infinito, ponendo z_i come sopra per $i = 1, 2, 3$ si ha che

$$\beta(P_1, P_2, P_3, \infty) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = [P_3, P_1, P_2].$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) &= \frac{(1\lambda_1 - 0\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)}{(1\lambda_2 - 0\mu_2)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)} = \\ &= \frac{\lambda_1(\lambda_2\lambda_3z_3 - \lambda_3\lambda_2z_2)}{\lambda_2(\lambda_1\lambda_3z_3 - \lambda_3\lambda_1z_1)} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \end{aligned}$$

□

Vediamo ora che effettivamente il birapporto è invariante per proiettività:

Proposizione 1.99 (Proiettività conservano birapporto).

Se $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è una proiettività tra due rette proiettive e $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ con P_1, P_2, P_3 distinti allora

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)).$$

Dimostrazione.

Se $\{v, w\}$ è una base normalizzata per (P_1, P_2, P_3) e $\varphi : V \rightarrow W$ induce f allora $(\varphi(v), \varphi(w))$ è una base normalizzata per il riferimento $(f(P_1), f(P_2), f(P_3))$. Osserviamo quindi che se $P_4 = [av + bw]$ allora $f(P_4) = [\varphi(av + bw)] = [a\varphi(v) + b\varphi(w)]$, ovvero le coordinate omogenee rimangono $[a : b]$. Quindi entrambi i birapporti coincidono e valgono b/a . □

Possiamo estendere la proposizione precedente come segue:

Proposizione 1.100 (Criterio del birapporto per l'esistenza di proiettività).

Se $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ sono rette proiettive, $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ con P_1, P_2, P_3 distinti e $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}(W)$ con Q_1, Q_2, Q_3 distinti allora esiste una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per tutti gli i se e solo se

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

Dimostrazione.

Data la proposizione sopra dobbiamo solo verificare che se hanno lo stesso birapporto allora trovo la proiettività. Per il teorema fondamentale della geometria proiettiva esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3$, quindi basta verificare che questa mappa P_4 in Q_4 .

Se P_4 ha coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ rispetto (P_1, P_2, P_3) allora $f(P_4)$ ha coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ nel riferimento $(f(P_1), f(P_2), f(P_3)) = (Q_1, Q_2, Q_3)$. Ma sappiamo che Q_4 ha coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ in (Q_1, Q_2, Q_3) per le ipotesi della proposizione, dunque $f(P_4) = Q_4$ come volevamo. □

Cerchiamo ora di capire quando possiamo definire una proiettività tra rette che manda quaterne di punti (distinti) in quaterne di punti (distinti), trascurando quindi l'ordine. Per come lo abbiamo definito, il birapporto cambia permutando i punti ma possiamo riscontrare una certa regolarità.

Proposizione 1.101.

Dati P_1, P_2, P_3, P_4 allineati distinti e ponendo $\beta = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$ allora abbiamo che $\forall \sigma \in S_4$, il birapporto $\beta(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)})$ può assumere solo uno tra i seguenti valori:

$$\beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta - 1}.$$

Dimostrazione.

Come riferimento riporto l'espressione per β calcolata prima

$$\beta = \frac{(\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)}{(\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)}.$$

Osserviamo che β è quindi invariante per gli elementi di S_4 dati da

$$V_4 = \{id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}.$$

Possiamo quindi limitarci a studiare rappresentanti delle classi di S_4/V_4 . Osserviamo che

$$S_4/V_4 = \{V_4, (2, 3)V_4, (2, 4)V_4, (3, 4)V_4, (2, 3, 4)V_4, (2, 4, 3)V_4\}$$

quindi basta vedere come agiscono queste. Svolgendo i calcoli troviamo che le classi portano ai seguenti birapporti

$$\begin{array}{llll} id & \longrightarrow & \beta & (2, 4) \longrightarrow 1 - \beta \\ (2, 3) & \longrightarrow & \frac{\beta}{\beta-1} & (2, 3, 4) \longrightarrow \frac{\beta-1}{\beta} \\ (3, 4) & \longrightarrow & \frac{1}{\beta} & (2, 4, 3) \longrightarrow \frac{1}{1-\beta} \end{array}$$

□

Vediamo quindi che il birapporto non è un invariante per le quaterne non ordinate. Cerchiamo di costruire un invariante.

Proposizione 1.102.

Supponiamo $\text{char } \mathbb{K} = 0$ e consideriamo la funzione razionale

$$j(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x - 1)^2}.$$

Se β è il birapporto di quattro punti distinti ($\beta \neq 0, 1$ in particolare) allora $j(\beta) = j(\beta')$ se e solo se

$$\beta' \in \left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta - 1} \right\} = B.$$

Dimostrazione.

Facendo i conti vediamo che $j(\beta) = j(\beta'), \forall \beta' \in B$.

Fissato $\beta \neq 0, 1$ osserviamo che $j(\beta') = j(\beta)$ se e solo se $q(\beta') = 0$ per $q(x) = (x^2 - x + 1)^3 - j(\beta)x^2(x - 1)^2$. Essendo q un polinomio di sesto grado, esso ha al massimo sei soluzioni con molteplicità. Osserviamo che se β è tale che $|B| = 6$ (cioè le forme del birapporto sotto permutazione sono tutte distinte) allora abbiamo la tesi perché abbiamo tutte e sole le radici di q .

Facendo un po' di conti vediamo che le forme dei birapporti non sono tutte distinte solo se β assume uno dei seguenti valori:

$$-1, 2, \frac{1}{2}, -\zeta, -\zeta^2$$

dove ζ è una radice terza dell'unità diversa da 1. Se $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}$ vediamo che $q(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2(x - \frac{1}{2})^2$ e quindi q si annulla solo nei valori $-1, 2, \frac{1}{2}$ che è ciò che volevo. Un procedimento simile mostra che per $-\zeta, -\zeta^2$ abbiamo $q(x) = (x + \zeta)^3(x + \zeta^2)^3$ e ancora q si annulla solo per i valori che già avevamo considerato.

In definitiva vediamo che le uniche radici di q appartengono sempre a B come volevamo. \square

Definizione 1.103 (Modulo/ j -invariante).

Per P_1, P_2, P_3, P_4 distinti abbiamo visto che $j(\beta(P_1, P_2, P_3, P_4))$ è un invariante e si chiama **modulo** o **j -invariante** della quaterna. Per comodità indichiamo $j(\beta(P_1, P_2, P_3, P_4))$ con $j(\{P_1, P_2, P_3, P_4\})$.

Teorema 1.104.

Se $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ sono rette proiettive e $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ sono quaterne di punti distinti di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente allora esiste $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che

$$f(\{P_1, P_2, P_3, P_4\}) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$$

se e solo se $j(\{P_i\}) = j(\{Q_i\})$.

Dimostrazione.

\implies) Se f è una proiettività che manda $\{P_i\}$ in $\{Q_i\}$, a meno di permutazione (permessa dall'invarianza di j) posso supporre $f(P_i) = Q_i$ e quindi troviamo

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

Segue che $j(\{P_i\}) = j(\{Q_i\})$.

\impliedby) A meno di permutazione $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ e quindi per la proposizione di prima (1.100) esiste una proiettività f tale che $f(P_i) = Q_i$, quindi in particolare $f(\{P_i\}) = \{Q_i\}$. \square

1.6 Coniche proiettive

Definizione 1.105 (Conica proiettiva).

Una **conica proiettiva** di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è un elemento di $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2])$.

Definiamo il **supporto** di una conica $[p]$ come

$$V([p]) = \{[x_0, x_1, x_2] \mid p(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

Osservazione 1.106.

$\dim \mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2] = |\{x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2\}| = 6$, quindi lo spazio proiettivo delle coniche ha dimensione 5.

Osservazione 1.107.

Osserviamo che per $[p'] = [p]$ e $[x_0, x_1, x_2] = [y_0, y_1, y_2]$

$$p'(y_0, y_1, y_2) = \mu p(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \mu \lambda^2 p(x_0, x_1, x_2).$$

È quindi ben definito quando un punto del proiettivo è annullato da un polinomio omogeneo ma NON è definita la sua immagine.

Come per il caso affine possiamo definire delle matrici che rappresentano coniche. Data la conica

$$[ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2]$$

la possiamo scrivere come $x^\top Ax$ dove

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo A la matrice che **rappresenta** la conica.

Osservazione 1.108.

A è simmetrica e in effetti c'è una bigezione tra lo spazio delle coniche e $\mathbb{P}(S(3, \mathbb{K}))$.

Osservazione 1.109.

Se pongo l'indeterminata x_0 uguale a 1 la teoria che stiamo sviluppando ci restituisce ciò che avevamo già ricavato per le coniche affini. La mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathbb{K}_d[x_0, \dots, x_n]) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]) \\ [p(x_0, \dots, x_n)] & \longmapsto & [p(1, x_1, \dots, x_n)] \end{array}$$

è detta **deomogenizzazione** rispetto all'indeterminata x_0 .

1.6.1 Equivalenza proiettiva e Classificazione delle coniche

Studiamo ora come mettere in relazione coniche e proiettività.

Definizione 1.110 (Immagine di una conica tramite una proiettività).

Data $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ e una conica $C = [p]$ poniamo $f(C) \doteq f^*C \doteq [p \circ M^{-1}]$ dove M è una matrice che rappresenta f nel riferimento standard.

La notazione $f(C)$ non crea ambiguità, infatti $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ e f^* hanno domini diversi per esempio.

Osservazione 1.111.

La definizione è ben posta, infatti

$$[\lambda p \circ (\mu M)^{-1}] = [\lambda \mu^{-2} (p \circ M^{-1})] = [p \circ M^{-1}].$$

Proposizione 1.112.

Sia C una conica e f una proiettività del piano proiettivo, allora $V(f(C)) = f(V(C))$.

Dimostrazione.

Sia p un polinomio tale che $[p] = C$ e sia M una matrice tale che $f([x]) = [Mx]$ per ogni $[x] \in \mathbb{P}^2$, allora

$$\begin{aligned} [x] \in V(f(C)) &\iff p \circ M^{-1}x = 0 \iff \\ [M^{-1}x] \in V(C) &\iff f^{-1}([x]) \in V(C) \iff [x] \in f(V(C)). \end{aligned}$$

□

Definizione 1.113 (Equivalenza proiettiva).

Due coniche C, C' di \mathbb{P}^2 sono **proiettivamente equivalenti** se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tale che $f(C) = C'$.

Osservazione 1.114.

$f(g(C)) = (f \circ g)(C)$, infatti se F, G sono matrici che rappresentano f e g rispettivamente abbiamo

$$f(g(C)) = f([p \circ G^{-1}]) = [p \circ G^{-1} \circ F^{-1}] = [p \circ (FG)^{-1}] = (f \circ g)(C).$$

Osserviamo che l'equivalenza proiettiva è una relazione di equivalenza, quindi ha senso classificare le coniche a meno di questa equivalenza.

Osservazione 1.115.

Se A è una matrice simmetrica che rappresenta la conica $[p] = C$ e $f = [M]$ è una proiettività allora

$$f(C) = [(M^{-1})^\top A M^{-1}].$$

Dimostrazione.

Segue calcolando:

$$x^\top (M^{-1})^\top A M^{-1} x = (M^{-1}x)^\top A (M^{-1}x) = p(M^{-1}x)$$

□

Osservazione 1.116.

A e A' sono matrici simmetriche che rappresentano coniche proiettivamente equivalenti se e solo se esistono $M \in GL_3(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ tali che

$$A' = \lambda M^\top A M,$$

ovvero se A e A' sono congruenti a meno di scalare.

Allora classificare le coniche proiettive ci porta a classificare i prodotti scalari a meno di scalare. Questo sappiamo farlo per \mathbb{R} e \mathbb{C} .

Teorema 1.117 (Classificazione delle coniche proiettive complesse).

Le coniche proiettive complesse si distinguono in tre classi a meno di equivalenza proiettiva. Queste sono determinate dal rango della matrice che le rappresenta.

Dei rappresentanti sono dati da

<i>Rango</i>	<i>Rappresentante</i>	<i>Matrice</i>	<i>Nome</i>
3	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	<i>Non degenera</i>
2	$x_0^2 + x_1^2$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	<i>Degenera</i>
1	x_0^2	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	<i>Doppiamente degenera</i>

Dimostrazione.

Dato che il rango è un invariante completo per congruenza e che la moltiplicazione per uno scalare non nullo non cambia il rango abbiamo la tesi. \square

Osservazione 1.118.

Nel caso di rango 2, essendo in un campo algebricamente chiuso, vale che $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$, quindi il supporto delle coniche proiettive complesse degeneri è dato da due rette distinte. Per il caso di rango 1 abbiamo una retta doppia data da $x_0 = 0$.

Osservazione 1.119.

In realtà questa classificazione continua a valere per un qualsiasi campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2.

Teorema 1.120 (Classificazione delle coniche proiettive reali).

Le coniche proiettive reali si distinguono in cinque classi a meno di equivalenza proiettiva. Queste sono determinate dalla segnatura della matrice che le rappresenta a meno di identificare (a, b, c) e (b, a, c) . Dei rappresentanti sono dati da

<i>Segnatura</i>	<i>Rappresentante</i>	<i>Degenericità</i>	<i>Supporto</i>
(3, 0, 0)	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$	<i>Non degenera</i>	<i>Vuoto</i>
(2, 1, 0)	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$	<i>Non degenera</i>	<i>Non vuoto</i>
(2, 0, 1)	$x_0^2 + x_1^2$	<i>Degenera</i>	<i>Punto</i>
(1, 1, 1)	$x_0^2 - x_1^2$	<i>Degenera</i>	<i>Due rette distinte</i>
(1, 0, 2)	x_0^2	<i>Doppiamente degenera</i>	<i>Retta doppia</i>

Dimostrazione.

Sappiamo che la segnatura è un invariante completo per congruenza e la moltiplicazione per scalari invertibili lascia la segnatura invariata o trasforma (a, b, c) in (b, a, c) (rispettivamente se lo scalare è positivo o negativo). Abbiamo dunque la tesi. \square

Osservazione 1.121.

Nei casi degeneri possiamo trovare facilmente il supporto per i rappresentanti:

$$V([x_0^2 + x_1^2]) = [0, 0, 1]$$

$$V([x_0^2 - x_1^2]) = \{x_0 - x_1 = 0\} \cup \{x_1 + x_0 = 0\}$$

$$V([x_0^2]) = \{x_0 = 0\}$$

1.6.2 Parte affine e chiusura proiettiva

Definizione 1.122 (Parte affine).

Sia $C = [p]$ una conica proiettiva e supponiamo che $x_0 \nmid p$. Allora il polinomio $f(x, y) = p(1, x, y)$ (il **deomogeneizzato** di p rispetto alla prima indeterminata) definisce una conica affine che definiamo **parte affine** di C .

Poniamo come notazione $[f] = j_0^{-1}(C)$

Osservazione 1.123.

La condizione $x_0 \nmid p$ assicura che $\deg f = 2$. Geometricamente stiamo escludendo componenti interamente all'infinito.

Osservazione 1.124.

Se siamo su un campo infinito, per il principio di identità dei polinomi abbiamo che $x_0 \nmid p$ è equivalente a richiedere $\{x_0 = 0\} \not\subseteq V(C)$.

Proposizione 1.125.

Per p e f come sopra abbiamo (identificando \mathbb{K}^2 con U_0) $V([p]) \cap U_0 = V([f])$.

Dimostrazione.

Segue calcolando

$$(x, y) \in j_0^{-1}(V(C) \cap U_0) \iff (1, x, y) \in V(C) \cap U_0 \iff p(1, x, y) = f(x, y) = 0.$$

□

Definizione 1.126 (Chiusura proiettiva).

Se $C = [f]$ è una conica affine chiamiamo la sua **chiusura proiettiva** la conica proiettiva di equazione

$$p(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f(x_1/x_0, x_2/x_0).$$

Poniamo come notazione $[p] = j_0(C) = \overline{C}$.

Osservazione 1.127.

Per come le abbiamo definite valgono $j_0^{-1}(\overline{C}) = C$ e, se $x_0 \nmid p$, $\overline{j_0^{-1}([p])} = [p]$.

Definizione 1.128 (Punti all'infinito di una conica).

Data una conica affine C definiamo $V(\overline{C}) \cap H_0$ i **punti all'infinito** o **impropri** di C .

Osservazione 1.129.

Se A è la matrice che rappresenta la conica affine f , cioè

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

allora A è la matrice che rappresenta anche la chiusura proiettiva

$$p(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Segue che per C conica affine, C è non degenera se e solo se \overline{C} è non degenera.

Osservazione 1.130.

Osserviamo che il numero di classi di coniche non degeneri a supporto non vuoto nel caso reale non coincidono tra le coniche affini e le coniche proiettive. In particolare vediamo che le chiusure proiettive di ellissi, iperboli e parabole devono essere proiettivamente equivalenti. Vedremo che la differenza corrisponde a come incontrano la retta all'infinito.

Teorema 1.131.

Sia C una conica affine reale non vuota non degenera, allora

- C è un'ellisse $\iff V(\overline{C}) \cap H_0 = \emptyset$
- C è una parabola $\iff |V(\overline{C}) \cap H_0| = 1$
- C è un'iperbole $\iff |V(\overline{C}) \cap H_0| = 2$

Dimostrazione.

Sia A una matrice che rappresenta C , allora essa rappresenta anche \overline{C} . Se

$$A = \begin{pmatrix} c & b^\top \\ b & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

(osserviamo che \tilde{A} è simmetrica) allora

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ci permette di studiare il comportamento su H_0 . Consideriamo tutte le possibili segnature di \tilde{A} :

C ellisse) Questo caso corrisponde a segnature $(2, 0, 0)$ o $(0, 2, 0)$, cioè \tilde{A} definita. Segue che \tilde{A} non ha vettori isotropi, ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$$

dunque l'unica soluzione sarebbe $[0, 0, 0]$ che però non è un punto del proiettivo, ovvero $V(\overline{C}) \cap H_0 = \emptyset$.

C iperbole) Questo caso corrisponde a segnature $(1, 1, 0)$, esistono dunque esattamente due rette isotrope (quelle date dai vettori della base iperbolica) e quindi esattamente due soluzioni su H_0 .

C parabola) Questo caso corrisponde a segnature $(1, 0, 1)$ o $(0, 1, 1)$. I vettori isotropi appartengono dunque ad una retta (il radicale) e quindi troviamo una sola soluzione su H_0 .

Segnatura $(0, 0, 2)$) \tilde{A} non può avere segnature $(0, 0, 2)$ perché altrimenti A sarebbe degenera.

Dato che diverse coniche danno diversi numeri di intersezione in realtà i casi sono in corrispondenza, infatti se avessimo più di due intersezioni con H_0 allora C non è una conica non degenera non vuota, perché altrimenti ci sarebbero 0, 1 o 2 intersezioni. Inoltre se due coniche come sopra hanno lo stesso numero di intersezioni vediamo per esclusione che devono essere affinemente equivalenti. \square

Proposizione 1.132 (Coniche per 5 punti).

Dati cinque punti $P_0, \dots, P_4 \in \mathbb{P}^2$ in posizione generale esiste un'unica conica C tale che $P_i \in V(C)$ per ogni i e questa è non degenera.

Dimostrazione.

Poiché P_0, \dots, P_3 sono in posizione generale, formano un riferimento proiettivo di \mathbb{P}^2 . Consideriamo allora coordinate omogenee in questo riferimento. Se $C = [p]$ dove $p(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$ allora poniamo che passi per i punti del riferimento:

$$\begin{aligned} p(P_0) = 0 &\iff p(1, 0, 0) = 0 \iff a = 0 \\ p(P_1) = 0 &\iff p(0, 1, 0) = 0 \iff b = 0 \\ p(P_2) = 0 &\iff p(0, 0, 1) = 0 \iff c = 0 \\ p(P_3) = 0 &\iff p(1, 1, 1) = 0 \iff a + b + c + d + e + f = 0 \end{aligned}$$

ovvero arriviamo alle condizioni: $a = b = c = 0$ e $d + e + f = 0$. Se $P_4 = [\alpha, \beta, \gamma]$ allora troviamo l'ultima condizione

$$p(P_4) = d\alpha\beta + e\alpha\gamma + f\beta\gamma = 0.$$

Cerchiamo quindi il numero di soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che la matrice ha rango 2, così lo spazio delle soluzioni avrà dimensione 1 come spazio vettoriale e quindi 0 passando al proiettivo, cioè avremo un'unica conica che rispetta le soluzioni.

Chiaramente il rango è almeno 1 e ha rango esattamente 1 se e solo se $\alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma$. Se $\alpha = 0$ allora anche uno tra β e γ è nullo, senza perdita di generalità sia $\beta = 0$, ma allora $P_4 = P_2$ e quindi i punti non sarebbero in posizione generale. \nexists

Ricaviamo per simmetria che nessuno dei tre è nullo, allora $\alpha\beta = \alpha\gamma \implies \beta = \gamma$ e $\alpha\gamma = \beta\gamma \implies \alpha = \beta$, quindi $\alpha = \beta = \gamma$ e quindi $P_4 = P_3$, che è assurdo. \nexists

Verifichiamo ora che la conica trovata è effettivamente non degenera. Osserviamo che una matrice che rappresenta C è

$$\begin{pmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $def + edf = 2def$. Se il determinante fosse nullo allora almeno uno tra d, e, f è nullo. Stiamo lavorando in caratteristica diversa da 2, quindi dobbiamo esaminare solo d, e ed f . Se almeno uno tra d, e, f è nullo allora almeno uno tra x_0, x_1 o x_2 divide p , quindi $V(C)$ è dato dall'unione di due rette distinte. Sapendo che C passa per 5 punti, per il principio dei cassetti almeno una delle due rette contiene 3 dei punti P_0, \dots, P_4 , e quindi questi non sarebbero in posizione generale. \nexists □

1.6.3 Tangenti

[Da ora in poi considereremo solo campi infiniti con caratteristica diversa da 2. Principalmente tratteremo di \mathbb{R} e \mathbb{C} .]

Intersezioni con rette e riducibilità

Studiamo come si comportano le intersezioni tra una retta e una conica in modo da poter definire successivamente la tangente.

Definizione 1.133 (Componenti e riducibilità).

Una retta r di equazione ℓ è una **componente** della conica $C = [F]$ se $\ell \mid F$.

Una conica $C = [F]$ è **irriducibile** se F è irriducibile.

Osservazione 1.134.

Se r è una componente di C allora C non è irriducibile e viceversa dato che $\deg C = 2$.

Osservazione 1.135.

L'irriducibilità è un invariante per equivalenza affine/proiettiva.

Osservazione 1.136.

Se r è componente di C allora $r \subseteq V(C)$ e quindi $|r \cap V(C)|$ è infinito.

Lemma 1.137.

Dato un polinomio $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo tale che $x_0 \nmid p$, esso è irriducibile se e solo se $f = p(1, x_1, \dots, x_n)$ è irriducibile.

Dimostrazione.

Se p fosse riducibile, potremmo scrivere $p = qr$. Si ha dunque che

$$f = q(1, x_1, \dots, x_n)r(1, \dots, x_n).$$

Se $f = ab$ allora omogenizzando entrambi i fattori con l'indeterminata x_0 troviamo che $p = AB$. \square

Osservazione 1.138.

I fattori irriducibili di un polinomio omogeneo sono omogenei.

Proposizione 1.139 (Numero di intersezioni tra coniche e rette).

Sia $C = [F]$ una conica in \mathbb{P}^2 e r una retta, allora $|V(C) \cap r|$ è finito se e solo se è minore o uguale a 2. Se il campo è algebricamente chiuso allora $|V(C) \cap r| \geq 1$.

Dimostrazione.

Parametizziamo r come $\{[\lambda v + \mu w] \mid [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}\}$ dove $P = [v]$ e $Q = [w]$ sono punti distinti passanti per r . I punti in $V(C) \cap r$ sono dati dalle radici considerate a meno di prodotto per scalare $[\lambda, \mu]$ del polinomio

$$G(\lambda, \mu) = F(\lambda v + \mu w) = F(\lambda v_0 + \mu w_0, \lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)$$

dove intendiamo che $v = (v_0, v_1, v_2)^\top$ e similmente per w .

Osserviamo che $G \in \mathbb{K}_2[\lambda, \mu]$ per costruzione e che $G \neq 0$ in quanto altrimenti $r \subseteq V(C)$ contraddicendo l'ipotesi sulla cardinalità dell'intersezione (siamo su un campo infinito).

Scriviamo dunque $G(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2$. Se $[\alpha, \beta]$ è una sua radice, essendo nel proiettivo, $\alpha \neq 0$ o $\beta \neq 0$. Supponiamo $\alpha \neq 0$, da cui possiamo supporre $\alpha = 1$ per le proprietà per proiettivo. Allora β è una radice di $a + b\mu + c\mu^2$ che ha al massimo due radici.

Se siamo su un campo algebricamente chiuso allora per il lemma $a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2$ si fattorizza in due termini lineari omogenei, ognuno dei quali fornisce una radice omogenea (possibilmente ripetuta). \square

Proposizione 1.140 (Non degenerare se e solo se irriducibile).

Se siamo su un campo algebricamente chiuso una conica C è irriducibile se e solo se è non degenerare.

Dimostrazione.

\implies) A meno di equivalenza proiettiva suppongo $F = x_0^2 + x_1^2 = (x_0 - ix_1)(x_0 + ix_1)$ o $F = x_0^2$, che sono entrambe riducibili.

\impliedby) Se $C = [F]$ e $F = \ell_1\ell_2$ dove $\ell_1(x) = a^\top x$ e $\ell_2(x) = b^\top x$ allora $F = x^\top ab^\top x = x^\top Mx$ dove $M = (b_0a \mid b_1a \mid b_2a)$. In generale M non è simmetrica, ma espandendo F vediamo che una matrice simmetrica che lo rappresenta⁶ è $M + M^\top = (b_0a + a_0b \mid b_1a + a_1b \mid b_2a + a_2b)$ e chiaramente questa matrice è degenerare perché le colonne appartengono a $\text{Span}(a, b)$. \square

Osservazione 1.141.

Non degenerare implica sempre irriducibile, la dimostrazione proposta sopra non ha usato l'ipotesi di chiusura algebrica.

Proposizione 1.142.

Se C è una conica tale che $|V(C) \cap r| = \infty$ per una retta r di equazione ℓ allora r è una componente di $C = [p]$.

Dimostrazione.

Senza perdita di generalità siano $\ell = x_0$ e $p = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$. Per quanto abbiamo già detto sulle cardinalità delle intersezioni

$$0 = G(\lambda, \mu) = p(\ell(\lambda, \mu)) = p(0, \lambda, \mu) = b\lambda^2 + c\mu^2 + f\lambda\mu,$$

dove la prima uguaglianza è intesa come polinomi. Segue dunque che

$$p = ax_0^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 = x_0(ax_0 + dx_1 + ex_2),$$

in particolare $\ell = x_0 \mid p$. \square

Tangenti

Definizione 1.143 (Retta tangente).

Se C è una conica non degenerare allora r è **tangente** a C in $P = [w] \in V(C) \setminus H_0$ se $t^2 \mid C([w + tv])$ dove $r = \{[w + tv] \mid t \in \mathbb{K}\}$.

Osservazione 1.144.

Per le coniche in particolare, questo corrisponde a chiedere $V(C) \cap r = \{P\}$.

Osservazione 1.145.

Se $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ è una proiettività, C una conica, $P \in V(C)$ e r tangente a C in P allora $f(r)$ è tangente a $f(C)$ in $f(P)$.

⁶Questo funziona se $2 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, cioè se $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$

Proposizione 1.146 (Equazione della tangente).

Sia C una conica non degenera. Per ogni $P \in V(C)$ esiste un'unica retta τ_P tangente a C in P . Inoltre, se $M \in S(3, \mathbb{K})$ rappresenta C e $P = [v]$ allora τ_P ha equazione $(Mv)^\top x = 0$.

Dimostrazione.

Cerchiamo di ricondurci a un caso più semplice. Osserviamo che se f è una proiettività del piano rappresentata da A e la tesi vale per P allora la matrice associata a $f(C)$ è $(A^{-1})^\top M A^{-1}$ e, poiché stiamo supponendo la tesi per P

$$r = \{0 = v^\top Mx = (Mv)^\top x\},$$

da cui avremmo

$$f(r) = \{0 = v^\top M A^{-1} x = v^\top A^\top (A^{-1})^\top M A^{-1} x = (Av)^\top ((A^{-1})^\top M A^{-1}) x\},$$

dove chiaramente $[Av] = f(P)$. Cioè se la tesi vale per un punto allora vale per ogni punto dato che posso sempre trovare una proiettività che porta una data coppia punto-conica non degenera in una qualsiasi altra coppia punto-conica non degenera.

Supponiamo dunque $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1] \in V(C)$ con $P = [1 : 0 : 0]$ (tre punti non allineati su una conica non degenera si trovano sempre). Si ha dunque che in questo riferimento

$$C = 2ax_0x_1 + 2bx_0x_2 + 2cx_1x_2,$$

da cui

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \implies Mv = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo quindi mostrare che la retta $ax_1 + bx_2 = 0$ è l'unica tangente. Consideriamo una retta generica passante per P

$$\ell = \lambda x_1 + \mu x_2$$

e imponiamo che il sistema abbia doppia soluzione

$$\begin{cases} C = 2ax_0x_1 + 2bx_0x_2 + 2cx_1x_2 = 0 \\ \ell = \lambda x_1 + \mu x_2 = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ allora per buona definizione di $[\lambda : \mu]$ dovremmo avere $x_2 = 0$, da cui sostituendo nella conica $2ax_0x_1 = 0$ e non abbiamo dunque una soluzione doppia dato che $a \neq 0$ (se $a = 0$ allora M avrebbe un minore 2×2 nullo che contraddirebbe C non degenera).

Consideriamo dunque $\lambda \neq 0$. Da $\ell = 0$ si trova $x_1 = -\frac{\mu}{\lambda}x_2$ e sostituendo sopra troviamo

$$x_2 \left(2 \left(b - a \frac{\mu}{\lambda} \right) x_0 - 2c \frac{\mu}{\lambda} x_2 \right) = 0.$$

Chiaramente $x_2 = 0$ è una soluzione, per avere una soluzione doppia dobbiamo quindi imporre che si annulli il coefficiente di x_0 , cioè

$$b - a \frac{\mu}{\lambda} = 0 \implies [\lambda : \mu] = [a : b],$$

che è la tesi. □

Osservazione 1.147.

$\nabla C(v) = Mv$ quindi possiamo scrivere la retta tangente come lo spazio ortogonale al gradiente dell'equazione nel punto (ricordiamo che stiamo parlando del caso non degenere).

Definizione 1.148 (Tangenti a conica degenere).

Se $C = \ell_1 \ell_2$ con ℓ_1, ℓ_2 omogenei lineari allora, posto $s_1 = V(\ell_1)$ e $s_2 = V(\ell_2)$, si ha che r è tangente a C in $P \in V(C)$ se

- $P \in s_1 \setminus s_2$ e $r = s_1$
- $P \in s_2 \setminus s_1$ e $r = s_2$
- $P \in s_1 \cap s_2$ e r è qualsiasi.

Osservazione 1.149.

Se $\ell_1 = \ell_2$ allora ogni retta è tangente a C in P per ogni $P \in C$.

1.6.4 Polarità

Definizione 1.150 (Retta polare).

Sia C una conica non degenere e sia M una matrice simmetrica che la rappresenta. Dato un punto $P = [v]$, la **retta polare** di P rispetto a C è la retta di equazione

$$(Mv)^\top x = 0$$

che indichiamo con $pol(P)$.

Osservazione 1.151.

Dato che M è invertibile si ha che per ogni retta r di coordinate w nel duale possiamo costruire il punto $P = [M^{-1}w]$ tale che $r = pol(P)$ (rispetto alla conica C rappresentata da M). Il punto P si dice **polo** della retta rispetto a C .

Proposizione 1.152.

Siano $P, Q \in \mathbb{P}^2$ e sia C una conica non degenere.

1. $P \in pol(Q) \iff Q \in pol(P)$
2. Se $P \in V(C)$ allora $pol(P)$ è la tangente a C in P (τ_P)
3. $pol(P) \cap V(C) = \{Q \in V(C) \mid P \in \tau_Q\}$.

Dimostrazione.

1) Se $P = [v]$ e $Q = [w]$ allora le equazioni di $pol(P)$ e $pol(Q)$ sono rispettivamente

$$v^\top Mx = 0, \quad w^\top Mx = 0.$$

Per la simmetria di M si ha che

$$P \in pol(Q) \iff w^\top Mv = 0 \iff v^\top Mw = 0 \iff Q \in pol(P).$$

2) L'equazione della polare è l'equazione della tangente, imporre il passaggio per C era l'unica condizione mancante.

3) Se $Q \in pol(P) \cap V(C)$ allora dai punti precedenti $P \in pol(Q) = \tau_Q$. Viceversa se $Q \in V(C)$ è tale che $P \in \tau_Q = pol(Q)$ allora $Q \in pol(P)$. \square

Definizione 1.153 (Conica duale).

Consideriamo l'isomorfismo proiettivo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 &\longrightarrow (\mathbb{P}^2)^* \\ P &\longmapsto \text{pol}(P) \end{aligned} ,$$

che è tale perché trasformazione proiettiva tra spazi della stessa dimensione. Se restringiamo il dominio al supporto della conica in questione vediamo che l'immagine deve essere il supporto di una conica in $(\mathbb{P}^2)^*$, che chiamiamo **conica duale** di C e indichiamo con C^* o $\text{pol}(C)$.

Osservazione 1.154.

Se M rappresenta C allora C^* è rappresentata da M^{-1}

Dimostrazione.

$$0 = x^\top Mx = x^\top MM^{-1}Mx = (Mx)^\top M^{-1}(Mx).$$

□

1.6.5 Punti reali e punti complessi

Definizione 1.155 (Complettizzazione).

Se $C = [F]$ è una conica su $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, la sua **complettizzata** è la conica $C_{\mathbb{C}}$ data dalla stessa equazione ma vista a coefficienti in \mathbb{C} .

Osservazione 1.156.

Se C e D sono coniche complesse allora

$$C = D \iff V(C) = V(D)$$

Dimostrazione.

Chiaramente $C = D \implies V(C) = V(D)$, mostriamo dunque l'altra implicazione.

Osserviamo che $V(C) = V(D)$ è un insieme infinito per la chiusura algebrica di \mathbb{C} . Se $V(C)$ contiene tre punti allineati allora è unione di due rette (eventualmente coincidenti). Per quanto detto questo mostra che le equazioni di queste rette dividono C e D con l'appropriata molteplicità, quindi $C = D$ dato che ignoriamo scalari.

Se invece $V(C)$ non contiene tre punti allineati considero cinque punti in posizione generale di $V(C)$. Per quanto detto esiste una sola conica non degenere che rispetta queste condizioni, dunque $C = D$. □

Osservazione 1.157.

Tramite l'inclusione $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si ha che $V(C) \subseteq V(C_{\mathbb{C}})$. Più precisamente vale

$$V(C) = V(C_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{P}^2\mathbb{R}.$$

Osservazione 1.158.

Non tutte le coniche in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si ottengono completizzando coniche reali. Inoltre non tutti i punti di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ (visto nell'immersione $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$) hanno coordinate reali, per esempio $[1 : 1 : 2] = [i : i : 2i]$.

1.6.6 Sistemi lineari di coniche

Definizione 1.159 (Sistema lineare di coniche).

Un **sistema lineare di coniche** è un sottospazio proiettivo di

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2]).$$

Un sistema di dimensione 1 si dice **fascio**.

Proposizione 1.160.

Se P_1, \dots, P_4 sono punti in posizione generale allora

$$\Lambda = \{C \mid P_1, \dots, P_4 \in V(C)\}$$

è un fascio di coniche.

Dimostrazione.

Passare per un punto impone una condizione lineare sui coefficienti della conica, quindi Λ è un sistema lineare.

Imporre una condizione lineare fa calare la dimensione di un sistema di al massimo uno, ma sappiamo che per 5 punti in posizione generale passa una sola conica, dunque ognuna delle quattro equazioni deve aver calato la dimensione di Λ di 1 (ricordiamo che $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2]) \cong \mathbb{P}^5$). \square

Corollario 1.161.

Dati P_1, \dots, P_4 come sopra, se ℓ_1, ℓ_2, g_1, g_2 sono le equazioni delle rette

$$L(P_1, P_3), L(P_2, P_4), L(P_1, P_4), L(P_2, P_3)$$

allora la conica generica del fascio della proposizione è della forma

$$\lambda \ell_1 \ell_2 + \mu g_1 g_2.$$

Osservazione 1.162.

Anche imporre la tangenza ad una data retta corrisponde ad una condizione lineare sulla conica.

Dimostrazione.

Senza perdita di generalità supponiamo che il punto sia $[0, 0, 1]$ e che la retta sia $x_0 = 0$. Se la conica è $C = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$ allora il passaggio per il punto impone $c = 0$ mentre, se C è non degenere, la condizione di tangenza diventa

$$\begin{pmatrix} 2a & d & e \\ d & 2b & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies e \neq 0, f = 0$$

dove $[1 : 0 : 0]$ sono le coordinate di $x_0 = 0$ nel duale. Dato che C era non degenere, la condizione $e \neq 0$ è superflua, quindi troviamo $f = 0$.

Nel caso di C degenere si ha che $x_0 \mid C$ oppure $[0, 0, 1]$ è un punto del nucleo di M . Nel primo caso $b = f = 0$ da cui comunque $f = 0$, nel secondo caso si ha $e = f = 0$. \square

Definizione 1.163 (Punto base).

Se Λ è un sistema lineare di coniche, un punto P è un **punto base** di Λ se $P \in V(C)$ per ogni $C \in \Lambda$.

Osservazione 1.164.

Se Λ è un fascio e G_1, G_2 sono coniche distinte di Λ allora i punti base di Λ sono $V(G_1) \cap V(G_2)$, infatti i punti base sono inclusi in questa intersezione e ogni altra conica di Λ è della forma $\lambda G_1 + \mu G_2$, che quindi si annulla su questi punti.

Osservazione 1.165.

I punti base possono essere infiniti, si consideri per esempio il fascio $\lambda x_0 x_1 + \mu x_0 x_2 = x_0(\lambda x_1 + \mu x_2)$.

Osservazione 1.166.

Per quattro punti in posizione generale passano esattamente tre coniche degeneri.

Dimostrazione.

Se i punti sono P_1, P_2, P_3, P_4 , le coniche degeneri in questione sono univocamente determinate dalla scelta di quale punto tra P_2, P_3, P_4 giace sulla stessa retta di P_1 , per esempio, se supponiamo $L(P_1, P_2) \subseteq V(C)$ allora $V(C) = L(P_1, P_2) \cup L(P_3, P_4)$. \square

Capitolo 2

Topologia generale

La topologia generale (in inglese spesso indicata “point-set topology”) si occupa delle proprietà basilari degli spazi topologici, ovvero insiemi dotati di una nozione di “vicinanza” tra punti. Questa vicinanza può essere data esplicitamente, per esempio nel caso degli spazi metrici viene data una funzione che restituisce la “distanza” tra due punti, ma la nozione è estremamente generale (per esempio nella topologia cofinita gli intorni dei punti risultano essere quasi tutto lo spazio).

In questo capitolo saranno date le definizioni basilari degli spazi topologici, con particolare attenzione alle nozioni di base, intorni, assiomi di numerabilità, mappe continue, omeomorfismi, prodotti, assiomi di separazione, ricoprimenti, connessione e connessione per archi, compattezza e quozienti.

2.1 Spazi Metrici

Gli spazi metrici, come suggerisce il nome, sono insiemi dotati di una distanza o metrica. In un certo senso sono gli spazi più vicini alla nostra intuizione (ma non sempre, per alcune metriche per esempio tutti i triangoli risultano isosceli!).

Definizione 2.1 (Spazio metrico).

Dato un insieme X , una **distanza** su X è una funzione $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ tale che

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

L’ultima proprietà è detta **disuguaglianza triangolare**.

La coppia (X, d) con d distanza è detta uno **spazio metrico**.

Definizione 2.2 (Distanza punto-insieme).

Se (X, d) è uno spazio metrico e $A \subseteq X$ allora definiamo la distanza tra un punto $x \in X$ e A come

$$d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Un modo semplice di costruire spazi metrici è dotare spazi vettoriali di una

Definizione 2.3 (Norma).

Dato V uno spazio vettoriale, una **norma** su V è una funzione $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$ tale che

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Osservazione 2.4.

la funzione $d(x, y) = \|x - y\|$ è una distanza, detta **distanza indotta** dalla norma $\|\cdot\|$.

Definiamo delle distanze ricorrenti:

Definizione 2.5 (Distanza discreta).

Dato un qualsiasi insieme X , la **distanza discreta** su X è data da

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Vediamo che effettivamente è una distanza: le prime due proprietà sono chiaramente rispettate e la disuguaglianza triangolare vale perché $d(x, y) + d(y, z) \geq 1$ eccetto il caso dove $x = y = z$, dove la disuguaglianza triangolare coincide con affermare $0 + 0 \geq 0$.

Definizione 2.6 (Distanze p).

Sia $p \geq 1$ e consideriamo le seguenti norme su \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Definiamo d_p come le distanze indotte da queste norme. Si può verificare che prendendo il limite $p \rightarrow \infty$ si definisce un'ulteriore norma:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

che induce la distanza d_∞ .

Chiamiamo $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ la **norma euclidea** e d_2 la **distanza euclidea**.

Definizione 2.7 (Distanze p integrali).

Consideriamo lo spazio $X = C^0([0, 1])$ delle funzioni continue sull'intervallo chiuso $[0, 1]$ e un reale $p \geq 1$. Definiamo le seguenti norme:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \stackrel{\text{Weierstrass}}{=} \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

In appendice è disponibile una dimostrazione che queste sono effettivamente norme, e quindi inducono distanze sullo spazio delle funzioni continue.

Definizione 2.8 (Embedding isometrico).

Dati (X, d) e (Y, d') spazi metrici, $f : X \rightarrow Y$ è un **embedding isometrico** se

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Osservazione 2.9.

Un embedding isometrico è sempre iniettivo, infatti

$$f(x) = f(y) \implies d'(f(x), f(y)) = 0 = d(x, y) \implies x = y.$$

Osservazione 2.10.

La composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico. L'identità $(X, d) \rightarrow (X, d)$ è un embedding isometrico.

Osservazione 2.11.

Gli spazi metrici con gli embedding isometrici sono una categoria.

Definizione 2.12 (Isometria).

Una **isometria** è un embedding isometrico bigettivo.

Osservazione 2.13.

L'inversa di una isometria è una isometria e la composizione di isometrie è una isometria. Banalmente l'identità è una isometria.

Notazione 2.14 (Gruppo delle isometrie).

Denotiamo il **gruppo delle isometrie** di (X, d) con $Isom(X)$.

Diamo ora una delle definizioni che risulteranno essere tra le più importanti del corso:

Definizione 2.15 (Palla aperta).

Dato (X, d) spazio metrico, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, e $x \in X$, definiamo

$$B_r(x) = B_d(x, r) = B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

la **palla aperta** di raggio r e **centro** x .

(Purtroppo la notazione che userò per le palle sarà estremamente variabile.)

Definizione 2.16 (Continuità in un punto).

Siano (X, d) e (Y, d') spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **continua** in $x_0 \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x_0), \varepsilon).$$

La funzione è **continua** se è continua per ogni $x_0 \in X$.

Definizione 2.17 (Aperto metrico).

Se (X, d) è spazio metrico, $A \subseteq X$ è **aperto** (rispetto alla metrica d) se $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Lemma 2.18.

Le palle aperte sono insiemi aperti nella metrica che le definisce.

Dimostrazione.

Fissiamo $x_0 \in X$ e $r > 0$. Per ogni $x \in B_r(x_0)$ pongo $\varepsilon = r - d(x_0, x)$. Osservo che $\varepsilon > 0$ perché $x \in B_r(x_0)$. Se $y \in B_\varepsilon(x)$, ovvero $d(x, y) < \varepsilon$, vedo che

$$d(x, y) < r - d(x_0, x) \implies d(y, x_0) \leq d(x, y) + d(x_0, x) < r$$

cioè $y \in B_r(x_0)$ e quindi $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(x_0)$. \square

Teorema 2.19 (Caratterizzazione delle continue).

Data una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra spazi metrici vediamo che essa è continua se e solo se la controimmagine di un aperto di Y tramite f è un aperto di X .

Dimostrazione.

\implies) Sia $A \subseteq Y$ aperto e sia $x_0 \in f^{-1}(A)$. Poiché A è aperto $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq A$. Per continuità esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq A \implies B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(A),$$

cioè $f^{-1}(A)$ è aperto.

\impliedby) Sappiamo che $B_\varepsilon(f(x_0))$ è aperto per ogni x_0 e per ogni $\varepsilon > 0$. Allora $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ è aperto per ipotesi. Dato che $x_0 \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ so che $\exists \delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$, dunque $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. Per arbitrarietà di x_0 e di ε concludo che f è continua. \square

Definizione 2.20 (Mappa Lipschitziana).

Se (X, d) e (Y, d') sono spazi metrici, dato $k \geq 0$, una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **k -Lipschitziana** se

$$d'(f(p), f(q)) \leq k d(p, q), \quad \forall p, q \in X.$$

Proposizione 2.21.

Una funzione lipschitziana è continua.

Dimostrazione.

Verifichiamo che f k -Lip. è continua in ogni punto di X . Fissiamo $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Se $k = 0$ la funzione è costante e la tesi vale banalmente. Se $k \neq 0$ scegliamo $\delta < \varepsilon/k$. Se $d(x_0, p) < \delta$ allora $d'(f(x_0), f(p)) \leq k\delta < \varepsilon$, cioè $f(B_\delta(x_0, \delta)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0), \varepsilon)$. \square

Verifichiamo ora che le palle aperte degli spazi metrici rispettano le seguenti fondamentali proprietà

Proposizione 2.22.

Sia (X, d) uno spazio metrico, allora

1. \emptyset e X sono aperti.
2. Se A, B sono aperti allora $A \cap B$ è aperto.
3. Se A_i con $i \in I$ è una famiglia di aperti allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

Dimostrazione.

1) Vuotamente vera.

2) Sia $x_0 \in A \cap B$. Poichè A è aperto $\exists \varepsilon_1 > 0$ tale che $B_{\varepsilon_1}(x_0) \subseteq A$ e analogamente $\exists \varepsilon_2 > 0$ tale che $B_{\varepsilon_2}(x_0) \subseteq B$. Sia $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, da cui

$$\begin{cases} B_\varepsilon(x_0) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x_0) \subseteq A \\ B_\varepsilon(x_0) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x_0) \subseteq B \end{cases} \implies B_\varepsilon(x_0) \subseteq A \cap B.$$

3) Sia $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$, allora esiste $j \in I$ tale che $x_0 \in A_j$. Essendo A_j aperto $\exists \varepsilon > 0$ tale che

$$B_\varepsilon(x_0) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Osservazione 2.23.

L'intersezione arbitraria di aperti può non essere aperta, per esempio l'intersezione della famiglia data da $B_{1/n}(0)$ in \mathbb{R} .

2.2 Spazi topologici

Le proprietà date sopra hanno in realtà una validità generale e ci permettono di definire gli oggetti principali che tratteremo in questo capitolo:

Definizione 2.24 (Spazio topologico).

Uno **spazio topologico** è una coppia (X, τ) dove X è un insieme e $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ per il quale valgono le seguenti proprietà:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $A, B \in \tau \implies A \cap B \in \tau$
3. $\Phi \subseteq \tau \implies \bigcup_{A \in \Phi} A \in \tau$.

L'insieme τ è detta una **topologia** su X e i suoi elementi sono detti **insiemi aperti** di (X, τ) .

Osservazione 2.25.

Ogni distanza su X induce una topologia su X .

Definizione 2.26 (Topologie discreta e indiscreta).

Gli insiemi $\mathcal{P}(X)$ e $\{\emptyset, X\}$ sono delle topologie su X e sono chiamate **topologia discreta** e **topologia indiscreta** rispettivamente.

Definizione 2.27 (Topologia cofinita).

Dato l'insieme X , l'insieme $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \mid |X \setminus A| \in \mathbb{N}\}$ è una topologia su X ed è detta la **topologia cofinita**. Essa ha come chiusi gli insiemi finiti e tutto lo spazio.

In modo analogo si può definire la topologia **conumerabile**.

Osservazione 2.28.

Non tutte le topologie sono indotte da metriche, per esempio la topologia indiscreta non può essere descritta come topologia indotta da metrica se $|X| \geq 2$. Questo deriva dal fatto che presi $x_1, x_2 \in X$ distinti, $B(x_1, d(x_1, x_2)/2)$ e $B(x_2, d(x_1, x_2)/2)$ sono disgiunte e non vuote.

Definizione 2.29 (Chiuso).

Dato (X, τ) uno spazio topologico, $C \subseteq X$ è **chiuso** se $X \setminus C \in \tau$.

Osservazione 2.30.

Una topologia può essere descritta anche dai chiusi. Tramite le leggi di De Morgan troviamo la seguente caratterizzazione equivalente di una topologia: Sia $\chi = \{X \setminus A \mid A \in \tau\}$ allora τ è una topologia su X se e solo se

1. $\emptyset, X \in \chi$
2. $A, B \in \chi \implies A \cup B \in \chi$
3. $\Phi \subseteq \chi \implies \bigcap_{C \in \Phi} C \in \chi$.

Definizione 2.31 (Finezza).

Siano τ_1, τ_2 topologie su X . τ_1 è **meno fine** di τ_2 se $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Osservazione 2.32.

La finezza descrive un ordinamento parziale sulle topologie con massimo (la topologia discreta) e minimo (l'indiscreta).

Intuitivamente una topologia è più fine se ha più aperti o più chiusi, cioè ci permette di distinguere meglio i punti.

2.2.1 Equivalenza topologica di distanze e limitatezza

Consideriamo nuovamente le topologie indotte da metriche:

Definizione 2.33 (Metriche topologicamente equivalenti).

Date due distanze d_1, d_2 su X , esse sono **topologicamente equivalenti** se inducono la stessa topologia su X .

Proposizione 2.34.

Siano d_1, d_2 distanze su X con topologie indotte τ_1 e τ_2 rispettivamente. Se $\exists k > 0$ tale che $d_1(x, y) \leq kd_2(x, y)$ allora τ_2 è più fine di τ_1 .

Dimostrazione.

Sia $A \in \tau_1$. Devo mostrare che $A \in \tau_2$. Dato $x_0 \in A$ sappiamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \subseteq A$. Se $d_2(x_0, y) < \varepsilon/k$ allora per ipotesi

$$d_1(x_0, y) \leq kd_2(x_0, y) < \varepsilon \implies y \in B_{d_1}(x_0, \varepsilon),$$

dunque $B_{d_2}(x_0, \varepsilon/k) \subseteq B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \subseteq A$, ovvero A è aperto rispetto a d_2 e quindi $A \in \tau_2$. \square

Corollario 2.35 (Criterio per equivalenza topologica).

Siano d_1, d_2 distanze su X tali che $\exists k > 0, h > 0$ tali che

$$d_1(x, y) \leq kd_2(x, y) \quad d_2(x, y) \leq hd_1(x, y),$$

allora d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione.

Applico la proposizione due volte. Dalla prima maggiorazione trovo $\tau_1 \subseteq \tau_2$ e dalla seconda $\tau_2 \subseteq \tau_1$. \square

Notazione 2.36.

Distanze come nel corollario precedente si dicono **bilipschitziane** tra loro.

Corollario 2.37.

Le distanze indotte da $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono topologicamente equivalenti su \mathbb{R}^n

Dimostrazione.

Basta mostrare la maggiorazione sulle norme che le inducono:

$$\|x\|_1 = \sum |x_i| = n \frac{\sum |x_i|}{n} \stackrel{\text{medie}}{\leq} n \sqrt{\frac{\sum |x_i|^2}{n}} = \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \text{ è un termine nella somma } \sum |x_i| \implies \|x\|_\infty \leq \|x\|_1.$$

□

Osservazione 2.38.

Non tutte le metriche sullo stesso spazio sono topologicamente equivalenti (2.377)

Definizione 2.39 (Limitatezza).

Se (X, d) è uno spazio metrico, $Y \subseteq X$ è **limitato** se esistono $x \in X$ e $R \in \mathbb{R}$ tali che

$$Y \subseteq B_R(x).$$

Proposizione 2.40 (Ogni spazio metrico “è limitato”).

Se (X, d) è uno spazio metrico allora esiste una metrica d' su X tale d e d' sono topologicamente equivalenti e $d'(x, y) \leq 1$ per ogni $x, y \in X$, in particolare X è limitato in (X, d') .

Dimostrazione.

Definiamo d' a partire da d come segue:

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Verifichiamo che d e d' sono topologicamente equivalenti:

$\tau_{d'} \subseteq \tau_d$) Per definizione $d'(x, y) \leq 1 \cdot d(x, y)$, quindi per la proposizione (2.34)

τ_d è più fine di $\tau_{d'}$.

$\tau_d \subseteq \tau_{d'}$) Sappiamo che se A è un aperto di (X, d) allora per ogni $x \in A$ esiste $\varepsilon_x > 0$ tale che $B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq A$. Da questo segue che

$$A = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon_x).$$

Osserviamo che definendo $\varepsilon'_x = \min\{\varepsilon_x, 1\}$ allora

$$A = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon'_x) = \bigcup_{x \in A} B_{d'}(x, \varepsilon'_x),$$

cioè A è aperto anche per la topologia indotta da d' .

□

2.2.2 La categoria Top

Definizione 2.41 (Funzione continua).

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ con $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ spazi topologici è **continua** se $A \in \tau_Y \implies f^{-1}(A) \in \tau_X$.

Osservazione 2.42.

La definizione funziona anche chiedendo che la controimmagine di chiusi sia chiusa dato che prendere la controimmagine commuta con prendere il complementare.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

Definizione 2.43 (Omeomorfismo).

Una funzione continua tra spazi topologici $f : X \rightarrow Y$ è un **omeomorfismo** se è biunivoca e f^{-1} è continua.

Osservazione 2.44.

L'identità $id : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ è un omeomorfismo.

Osservazione 2.45.

Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sono continue allora anche $g \circ f : X \rightarrow Z$ è continua. Segue che la composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo.

Dimostrazione.

Segue per verifica diretta:

$$A \in \tau_Z \implies g^{-1}(A) \in \tau_Y \implies (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \tau_X.$$

□

Osservazione 2.46.

Quanto detto ci permette di definire la categoria *Top*, i cui oggetti sono spazi topologici e i cui morfismi sono funzioni continue. Gli isomorfismi corrispondono agli omeomorfismi.

Osservazione 2.47.

Omeomorfismi e funzioni continue bigettive non coincidono.

Dimostrazione.

Siano τ_1, τ_2 topologie su X tali che $\tau_2 \subsetneq \tau_1$. Allora $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ è continua ma $id : (X, \tau_2) \rightarrow (X, \tau_1)$ no. □

2.2.3 Chiusura e Parte interna

Definizione 2.48 (Chiusura).

Dato X spazio topologico con topologia τ e un suo sottoinsieme $Y \subseteq X$, la **chiusura** di Y in X è il più piccolo chiuso che contiene Y , ovvero

$$\bar{Y} = \bigcap_{C \text{ chiuso, } C \supseteq Y} C.$$

Dato che l'intersezione di chiusi è chiusa e X è chiuso, la chiusura è ben definita.

Definizione 2.49 (Parte interna).

Dato X spazio topologico con topologia τ e un suo sottoinsieme $Y \subseteq X$, la **parte interna** di Y in X è il più grande aperto contenuto in Y , ovvero

$$\overset{\circ}{Y} = \text{int}(Y) = \bigcup_{A \in \tau, A \subseteq Y} A.$$

Dato che l'unione di aperti è aperta e \emptyset è aperto, la parte interna è ben definita.

Osservazione 2.50.

Un aperto A in X è contenuto in Z se e solo se $X \setminus A$ è un chiuso che contiene $X \setminus Z$, segue quindi che

$$\text{int}(Z) = X \setminus \overline{(X \setminus Z)}.$$

Analogamente

$$\overline{Z} = X \setminus \text{int}(X \setminus Z).$$

Osservazione 2.51.

$\overset{\circ}{Z} = Z \iff Z$ aperto e $\overline{Z} = Z \iff Z$ chiuso.

Definizione 2.52 (Frontiera).

La **frontiera (topologica)** o **bordo** di $Z \subseteq X$ è definita come

$$\partial Z = \overline{Z} \setminus \overset{\circ}{Z}$$

Definizione 2.53 (Punti aderenti e di accumulazione).

Un punto $P \in X$ con $Z \subseteq X$ è

- **aderente** a Z se $P \in \overline{Z}$;
- **di accumulazione** per Z se $P \in \overline{Z \setminus \{P\}}$.

Osservazione 2.54.

Se $Z \subseteq Y \subseteq X$ allora $\overline{Z} \subseteq \overline{Y}$ e $\overset{\circ}{Z} \subseteq \overset{\circ}{Y}$. In particolare i punti di accumulazione sono anche aderenti.

Osservazione 2.55.

Esistono punti aderenti che non sono di accumulazione (2.378)

Diamo ora un criterio utile per capire se un punto è aderente. L'idea è che ogni aperto che lo contiene dovrà essere così vicino all'insieme che almeno una parte deve intersecarlo.

Proposizione 2.56 (Caratterizzazione della chiusura).

Sia X uno spazio topologico e $Z \subseteq X$. Allora $P \in \overline{Z}$ se e solo se $\forall A \subseteq X$ aperto tale che $P \in A$ abbiamo che $A \cap Z \neq \emptyset$.

Dimostrazione.

\Leftarrow) Se per assurdo $P \notin \overline{Z}$, allora $P \in X \setminus \overline{Z} = A$, il quale è aperto che per quanto appena detto contiene P . Eppure $A \cap \overline{Z} = \emptyset$ per definizione, da cui $A \cap Z = \emptyset$ che contraddice l'ipotesi. \neq

\Rightarrow) Supponiamo per assurdo che $\exists A$ aperto tale che $P \in A$ e $A \cap Z = \emptyset$. Vediamo che $X \setminus A$ è un chiuso in X che contiene Z e quindi per definizione di chiusura $\overline{Z} \subseteq X \setminus A$. Ma dato che $P \in A$, $P \notin X \setminus A$ e quindi $P \notin \overline{Z}$ che contraddice l'ipotesi. \neq □

Proposizione 2.57.

Se $P \notin Z$ e P è aderente allora P è di accumulazione.

Dimostrazione.

Dalla proposizione, P aderente è equivalente a $\forall A$ aperto con $P \in A$, $A \cap Z \neq \emptyset$. Dato che $P \notin Z$, $A \cap Z = A \cap Z \setminus \{P\} \neq \emptyset$. Dato che questo vale per ogni A aperto che contiene P ricaviamo sempre dalla proposizione che $P \in \overline{Z \setminus \{P\}}$. \square

Osservazione 2.58.

$\overline{Z_1 \cap Z_2} \neq \overline{Z_1} \cap \overline{Z_2}$, per esempio $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ ma $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Definizione 2.59 (Insieme denso).

Un sottoinsieme $Z \subseteq X$ è **denso** se $\overline{Z} = X$.

Osservazione 2.60.

Z è denso in X se e solo se $\forall A \subseteq X$ aperto non vuoto si ha $A \cap Z \neq \emptyset$.

2.2.4 Basi e Prebasi

Se X è un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ voglio trovare “la topologia generata da S ”, cioè la più piccola topologia che contiene S .

Lemma 2.61.

Siano τ_i delle topologie su X . Allora $\tau = \bigcap \tau_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una topologia su X .

Dimostrazione.

Verifichiamo gli assiomi della topologia:

- In quanto topologie $\emptyset, X \in \tau_i$ per ogni i , quindi $\emptyset, X \in \bigcap \tau_i$.
- Vedo che $A, B \in \tau$ se e solo se $A, B \in \tau_i$ per ogni i e, in quanto τ_i topologia, $A \cap B \in \tau_i$ per ogni i , da cui $A \cap B \in \tau$.
- Per l'unione arbitraria il ragionamento è identico al punto precedente.

\square

Definizione 2.62 (Topologia generata).

La **topologia generata** da $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ è

$$\tau_S = \bigcap_{\tau \text{ topologia, } S \subseteq \tau} \tau.$$

Osservo che la definizione è ben posta per il lemma e perché l'intersezione non è vuota in quanto $\mathcal{P}(X) \supseteq S$.

Definizione 2.63 (Base topologica).

Se (X, τ) è uno spazio topologico, una **base** di τ è un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tale che

$$\forall A \in \tau, \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \text{ t.c. } A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B.$$

Proposizione 2.64 (Caratterizzazione delle basi).

L'insieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una base di qualche topologia se e solo se $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ e $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, esiste $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B.$$

Dimostrazione.

\implies) So che X è aperto e che se B_1, B_2 sono aperti allora anche $B_1 \cap B_2$ aperto.

\impliedby) Sia $\tau = \{A \subseteq X \mid \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \text{ t.c. } A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\}$. Verifichiamo che è una topologia (chiaramente \mathcal{B} ne è base in tal caso). Verifichiamo gli assiomi:

$\emptyset \in \tau$ come unione vuota, mentre $X \in \tau$ per ipotesi.

Se $A_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$ allora

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B = \bigcup_{B \in \bigcup_i \mathcal{B}_i} B \in \tau.$$

Se $A_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B, A_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_2} B \in \tau$ allora

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \cap \bigcup_{B \in \mathcal{B}_2} B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, C \in \mathcal{B}_2} (B \cap C) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, C \in \mathcal{B}_2} \bigcup_{D \in \mathcal{B}'} D$$

che appartiene a τ per definizione di τ . □

Osservazione 2.65.

In generale S non è una base della topologia generata da S perché può non rispettare le condizioni sopra.

Definizione 2.66 (Prebase topologica).

Una **prebase** di una topologia τ su X è un sottoinsieme $U \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^k U_i \mid k \in \mathbb{N}, U_i \in U \right\}$$

è una base di τ . Per evitare di riscrivere questo insieme troppe volte lo chiameremo “le intersezioni finite di U ”.

Osservazione 2.67.

Ogni base è una prebase ma non è garantito il viceversa.

Teorema 2.68 (Caratterizzazione della topologia generata).

Se X è un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ allora τ è la topologia generata da S se e solo se $S \cup \{X\}$ è una prebase di τ .

Dimostrazione.

\implies) Sia τ la topologia generata da S . $S \subseteq \tau$ e $X \in \tau$, quindi $S \cup \{X\} \subseteq \tau$. Sia \mathcal{B} le intersezioni finite di $S \cup \{X\}$. Vediamo che \mathcal{B} è base di qualche topologia, infatti $X = \bigcup_{B \in \{X\} \subseteq \mathcal{B}} B$ e $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ per costruzione.

Sia quindi τ' la topologia di cui \mathcal{B} è base. Visto che $S \cup \{X\} \subseteq \tau$ e dato che τ è una topologia abbiamo che $\mathcal{B} \subseteq \tau$ e quindi che $\tau' \subseteq \tau$. Ma dato che $S \subseteq \tau'$ e τ è la topologia generata da S vediamo che $\tau' = \tau$.

\impliedby) Sia τ_S la topologia generata da S e τ la topologia della quale $S \cup \{X\}$ è prebase. $\tau_S \subseteq \tau$ per definizione di topologia generata. D'altra parte $S \subseteq \tau_S$ e dagli assiomi di topologia segue che $\tau \subseteq \tau_S$, dunque $\tau_S = \tau$. □

Osservazione 2.69.

La topologia generata da S sono le unioni arbitrarie delle intersezioni finite di S a cui aggiungo X .

Proposizione 2.70 (Criterio per continuità).

Se X e Y sono spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$ è una funzione allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è continua.
2. $\exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ base per Y tale che $\forall B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ è aperto in X .
3. $\exists U \subseteq \mathcal{P}(Y)$ prebase per Y tale che $\forall U' \in U$, $f^{-1}(U')$ è aperto in X .

Dimostrazione.

1 \implies 2) Gli elementi di \mathcal{B} sono aperti.

2 \implies 3) Le basi sono prebasi.

3 \implies 1) Se A è aperto in Y allora

$$A = \bigcup_{\alpha} \left(\bigcap_{k=1}^{N_{\alpha}} U_{i_{\alpha,k}} \right), \text{ con } U_{i_{\alpha,k}} \in U,$$

da cui

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{\alpha} \left(\bigcap_{k=1}^{N_{\alpha}} f^{-1}(U_{i_{\alpha,k}}) \right)$$

è aperto perché gli $f^{-1}(U_{i_{\alpha,k}})$ sono aperti. □

2.3 Assiomi di Numerabilità e Intorni

Siamo pronti a definire il concetto di intorno e a dare gli assiomi di numerabilità. Questi concetti ci danno un modo per misurare quanto e come i punti del nostro spazio topologico sono vicini.

2.3.1 Intorni

Definizione 2.71 (Intorno).

Dato X spazio topologico, un **intorno** di $x_0 \in X$ è un sottoinsieme U di X tale che $\exists A$ aperto in X tale che $x_0 \in A \subseteq U$.

Osservazione 2.72.

Un intorno può non essere aperto.

Notazione 2.73.

Indicheremo, se non altrimenti specificato, l'insieme degli intorni di un dato punto x_0 come $I(x_0)$ o $I_X(x_0)$ nel caso sia necessario specificare lo spazio.

Osservazione 2.74.

Per gli intorni valgono le seguenti proprietà:

1. U è un intorno di x_0 se e solo se $x_0 \in \overset{\circ}{U}$.
2. Se U intorno di x_0 e $U \subseteq V$ allora anche V è un intorno di x_0 .
3. Se U e V sono intorni di x_0 allora anche $U \cap V$ è un intorno di x_0 . Questo deriva dal fatto che $x_0 \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V}$ che essendo intersezione di aperti è ancora aperto e dunque $x_0 \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} \subseteq \text{int}(U \cap V)$.

Proposizione 2.75 (Caratterizzazione di aperti/chiusi con intorni).

Valgono le seguenti proposizioni:

1. A è aperto se e solo se A è intorno di ogni suo punto
2. Se $Z \subseteq X$ allora la chiusura di Z sono i punti x tali che ogni U intorno di x , $U \cap Z \neq \emptyset$.
3. Z è chiuso se e solo se $(x \in X, U \in I(x), U \cap Z \neq \emptyset) \implies x \in Z$.

Dimostrazione.

1) \implies) Ovvio, dato che A è aperto e $A \subseteq A$.

\impliedby) Per ogni $x \in A$ sia A_x un aperto tale che $x \in A_x \subseteq A$. Osservo che $A = \bigcup_{x \in A} A_x$ che è aperto in quanto unione di aperti.

2) Affermiamo che

$(\forall A \text{ aperto in } X \text{ tale che } x \in A, A \cap Z \neq \emptyset) \iff \forall U \text{ intorno di } x, U \cap Z \neq \emptyset$.

\impliedby) Ovvio, infatti un aperto è intorno di ogni suo punto.

\implies) Se U è intorno di x e A è un aperto tale che $x \in A \subseteq U$ allora $A \cap Z \neq \emptyset \implies U \cap Z \neq \emptyset$.

Questa equivalenza ci permette di tradurre la caratterizzazione (2.56) in quella corrente.

3) Segue dalla precedente. □

Possiamo ora dare la caratterizzazione di continuità familiare dal contesto dell'analisi:

Definizione 2.76 (Continuità in un punto).

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **continua in** $x_0 \in X$ se $\forall U \in I(f(x_0))$ esiste $V \in I(x_0)$ tale che $f(V) \subseteq U$ (Equivalentemente se $\forall U \in I(f(x_0)), f^{-1}(U) \in I(x_0)$).

Proposizione 2.77 (Continua equivale a continua in ogni punto).

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua se e solo se è continua in x_0 per ogni x_0 in X .

Dimostrazione.

\impliedby) Se A è aperto in Y allora è intorno di ogni suo punto. Essendo f continua in ogni x_0 , lo è in particolare per gli x_0 in $f^{-1}(A)$. Allora $f^{-1}(A)$ è un intorno di ogni $x_0 \in f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A)$ è aperto.

\implies) Fissiamo $x_0 \in X$. Prendiamo $U \in I(f(x_0))$. Osserviamo che $f(x_0) \in \overset{\circ}{U}$. Essendo $\overset{\circ}{U}$ aperto, $f^{-1}(\overset{\circ}{U}) \subseteq f^{-1}(U)$ è aperto e $x_0 \in f^{-1}(\overset{\circ}{U})$, da cui $f^{-1}(U)$ è un intorno di x_0 . □

2.3.2 Sistemi fondamentali di intorni e I-numerabilità

Definizione 2.78 (Sistema fondamentale di intorni).

Un **sistema fondamentale di intorni** (SFI) di $x_0 \in X$ è un sottoinsieme $J \subseteq I(x_0)$ tale che $\forall U \in I(x_0)$ esiste $V \in J$ tale che $V \subseteq U$

Definizione 2.79 (I-numerabilità).

Uno spazio X è **primo numerabile** (I-numerabile) o soddisfa il **primo assioma di numerabilità** se per ogni $x_0 \in X$ posso trovare un SFI al più numerabile.

Proposizione 2.80 (Gli spazi metrici sono I-numerabili).

Se X è uno spazio metrico allora X è I-numerabile.

Dimostrazione.

Sia $x \in X$ e definiamo $U = \{B(x, q)\}_{q \in \mathbb{Q}, q > 0}$. Chiaramente U è numerabile, affermiamo che è un sistema fondamentale di intorni per x .

Sia V un intorno di x . Per definizione della topologia indotta da una metrica esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq V$. Dato che $0 < \varepsilon$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < q < \varepsilon$, dunque

$$B(x, q) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq V$$

e $B(x, q)$ è un elemento di U . □

Lemma 2.81.

Se X è I-numerabile e $U = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è un SFI di $x \in X$ allora posso supporre senza perdita di generalità che $U_{i+1} \subseteq U_i$ per ogni i .

Dimostrazione.

Poniamo $V_i = \bigcap_{j=0}^i U_j$. Vediamo che per ogni i , V_i è un intorno di x e se U è un qualsiasi intorno di x allora $\exists i \in \mathbb{N}$ tale che $U_i \subseteq U$ e dato che $V_i \subseteq U_i$, $V_i \subseteq U$. □

2.3.3 II-numerabilità e Separabilità

Definizione 2.82 (II-numerabilità).

Uno spazio topologico è **II-numerabile** (letto “secondo numerabile”) o soddisfa il **secondo assioma di numerabilità** se esiste una base (al più) numerabile per la topologia.

Osservazione 2.83.

L’uso di “al più” nella definizione sopra non è necessario. Nel caso di spazi finiti basta ripetere frequentemente dei termini. Preferiamo specificarlo però in quanto alcune definizioni successive richiederanno la specifica “al più numerabile” in un contesto dove “numerabile” da solo sarebbe scorretto.

Definizione 2.84 (Separabilità).

Uno spazio topologico è **separabile** se contiene un sottoinsieme al più numerabile denso.

Teorema 2.85 (II-numerabile è separabile e in metrico coincidono).

Se X è II-numerabile allora X è separabile. Se X è metrizzabile allora vale anche l’altra implicazione.

Dimostrazione.

L’idea è considerare un punto per ogni aperto della base numerabile per la prima implicazione e sfruttare la numerabilità e densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} nell’altra.

\implies) Supponiamo che X sia II-numerabile e sia quindi $\{\mathcal{B}_n\}$ una base numerabile. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ considero $x_n \in \mathcal{B}_n$ (se $\mathcal{B}_n = \emptyset$ lo ignoro). Affermo che $Y = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è denso e al più numerabile. La seconda proprietà è chiaramente verificata per costruzione quindi basta verificare la densità, ovvero che $\forall A$ aperto di X non vuoto, $A \cap Y \neq \emptyset$. Essendo \mathcal{B} una base esiste $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$. Dato che $A \neq \emptyset$, $\exists \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}'$ non vuoto, e quindi $\mathcal{B}_i \subseteq A$. Dato che $x_i \in \mathcal{B}_i \cap Y \subseteq A \cap Y$ ricaviamo che $A \cap Y \neq \emptyset$ come volevasi dimostrare.

\Leftarrow) Supponiamo che X sia metrizzabile e fissiamo una distanza d che induce la topologia. Supponiamo che $Y \subseteq X$ sia al più numerabile e denso in X . Affermiamo che

$$\mathcal{B} = \{B(y, R) \mid y \in Y, R \in \mathbb{Q}, R > 0\}$$

è una base della topologia al più numerabile. Chiaramente è al più numerabile quindi concentriamoci sul mostrare che è una base. Sia $A \neq \emptyset$ un aperto in X . Sia quindi $x \in A$. Basta mostrare che $\exists y, R$ tali che $x \in B(y, R) \subseteq A$, da cui A sarà unione di elementi di \mathcal{B} . Essendo Y denso in X , $\exists y \in B(x, \varepsilon/3)$. Fissiamo anche $R \in \mathbb{Q}$ tale che $\varepsilon/3 < R < \varepsilon/2$. Affermiamo che $x \in B(y, R) \subseteq A$. Infatti $d(x, y) < \varepsilon/3 < R$ e preso $z \in B(y, R)$ abbiamo

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon/3 + R < \varepsilon/3 + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

dunque $z \in B(x, \varepsilon) \subseteq A$. □

Corollario 2.86.

\mathbb{R}^n è II-numerabile.

Dimostrazione.

\mathbb{Q}^n è un denso numerabile in \mathbb{R}^n , quindi \mathbb{R}^n è uno spazio metrico separabile. La tesi segue per (2.85). □

Proposizione 2.87 (II-numerabile implica I-numerabile).

Se X è II-numerabile allora è anche I-numerabile.

Dimostrazione.

Sia \mathcal{B} una base al più numerabile e fissiamo $x_0 \in X$. Sia $\mathcal{B}(x_0) = \{B_n \in \mathcal{B} \mid x_0 \in B_n\}$. Affermiamo che esso è un SFI al più numerabile. Chiaramente è al più numerabile in quanto sottoinsieme di \mathcal{B} . Osserviamo che gli elementi di $\mathcal{B}(x_0)$ sono intorni di x_0 . Se U è un intorno di x_0 allora

$$x_0 \in \overset{\circ}{U} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B, \quad \text{con } \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}.$$

Dato che $x_0 \in \overset{\circ}{U}$ esiste $B \in \mathcal{B}'$ tale che $x_0 \in B$, ma allora $B \in \mathcal{B}(x_0)$ e $B \subseteq \overset{\circ}{U} \subseteq U$. □

Osservazione 2.88.

I-numerabile e II-numerabile NON sono equivalenti (2.379).

2.3.4 Successioni

Definizione 2.89 (Successione).

Sia X uno spazio topologico. Una **successione a valori in X** è una funzione $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ (dove indichiamo tradizionalmente $x(n)$ con x_n).

Una **sottosuccessione** di x_n è successione data da x_{n_k} , dove $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è strettamente crescente.

Definizione 2.90 (Definitivamente e Frequentemente).

Una successione x_n rispetta una proprietà P **definitivamente** se $\exists k_0$ tale che $\forall k \geq k_0, x_k$ rispetta P , mentre x_n rispetta P **frequentemente** se $\forall k_0, \exists k \geq k_0$ tale che x_k rispetta P .

Definizione 2.91 (Limite).

Affermiamo che la successione x_n **tende** a $\bar{x} \in X$ (o che \bar{x} è un **limite** di x_n) e scriviamo $x_n \rightarrow \bar{x}$ o $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ se

$$\forall U \text{ intorno di } \bar{x}, x_n \in U \text{ definitivamente.}$$

Osservazione 2.92.

Osserviamo che

- i limiti possono non esistere.
- i limiti di una data successione possono non essere unici. Per esempio nella topologia indiscreta ogni punto è limite di ogni successione.
- se x_n è una successione (definitivamente) costante allora quella costante è un limite di x_n .
- Se $x_n \rightarrow \bar{x}$ allora ogni sottosuccessione x_{n_k} è tale che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$.

Definizione 2.93 (Chiuso per successioni).

Un insieme $Y \subseteq X$ è **chiuso per successioni** se per ogni x_n successione a valori in Y , se $x_n \rightarrow \bar{x}$ allora $\bar{x} \in Y$.

Proposizione 2.94 (Chiusura e Chiusura per successioni).

Sia $Y \subseteq X$ e poniamo

$$\hat{Y} = \{\bar{x} \in X \mid \exists x_n \text{ successione t.c. } x_n \in Y \text{ e } x_n \rightarrow \bar{x}\}.$$

Allora $\hat{Y} \subseteq \bar{Y}$ e se X è I-numerabile allora $\hat{Y} = \bar{Y}$.

Dimostrazione.

⊆) Usiamo la caratterizzazione di \bar{Y} per intorni. Sia $\bar{x} \in \hat{Y}$ e sia U un intorno di \bar{x} . Per definizione di limite, una successione $x_n \rightarrow \bar{x}$ è tale che $x_n \in U$ definitivamente, cioè $\emptyset \neq U \cap \{x_n\} \subseteq U \cap Y$, quindi $\bar{x} \in \bar{Y}$.

⊇) Supponiamo che X sia I-numerabile e prendiamo $\bar{x} \in \bar{Y}$. Dobbiamo mostrare che $\exists x_n$ successione a valori in Y tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$. Sia $U = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un SFI numerabile di \bar{x} . Per il lemma (2.81) possiamo supporre senza perdere generalità che $U_{i+1} \subseteq U_i$ per ogni i .

Dato che $\bar{x} \in \bar{Y}$, si ha che $Y \cap U_i \neq \emptyset$, dunque $\exists x_i \in Y \cap U_i$. Affermiamo che $x_i \rightarrow \bar{x}$, infatti, dato U un intorno di \bar{x} , per definizione di SFI esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ con $U_{n_0} \subseteq U$. D'altronde $\{x_i\}_{i \geq n_0} \subseteq U_{n_0}$, quindi x_i è definitivamente contenuta in U come volevamo mostrare. □

Definizione 2.95 (Aperto per successioni).

Se $Y \subseteq X$ allora Y è **aperto per successioni**¹ se, per ogni $\bar{x} \in Y$, se x_n è una successione in X tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$, allora $x_n \in Y$ definitivamente.

Proposizione 2.96 (Parte interna e Parte interna per successioni).

Sia $Y \subseteq X$. Se $\bar{x} \in \hat{Y}$, allora per ogni successione tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$ si ha $x_n \in Y$ definitivamente.

Se X è I-numerabile vale anche il viceversa.

¹In realtà non ho mai visto questo termine usato, ho voluto dare questa definizione solo per aiutare i lettori ad afferrare la simmetria degli argomenti presentati in questa sezione.

Dimostrazione.

\implies) Se $\bar{x} \in \overset{\circ}{Y}$ allora Y è un intorno di \bar{x} , quindi ogni successione $x_n \rightarrow \bar{x}$ cade definitivamente in Y .

\impliedby) Per assurdo supponiamo che $\bar{x} \notin \overset{\circ}{Y}$ e costruiamo $x_n \rightarrow \bar{x}$ tale che $x_n \notin Y$ definitivamente. Poiché $\bar{x} \notin \overset{\circ}{Y}$, $\bar{x} \in \overline{X \setminus Y}$, dunque per la proposizione precedente esiste $x_n \in X \setminus Y$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$, che contraddice l'ipotesi. $\nexists \quad \square$

Definizione 2.97 (Continuità per successioni).

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **continua per successioni** se $\forall x_n$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$ allora $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$.

Proposizione 2.98 (Continuità e Continuità per successioni).

Sia $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici. Allora se f è continua è continua per successioni. Se X è I-numerabile allora continuità e continuità per successioni sono equivalenti.

Dimostrazione.

\implies) Supponiamo che $x_n \rightarrow \bar{x}$ e sia U un intorno di $f(\bar{x})$. Essendo f continua, $f^{-1}(U)$ è un intorno di \bar{x} , dunque $x_n \in f^{-1}(U)$ definitivamente, ovvero $f(x_n) \in U$ definitivamente.

\impliedby) Sia $A \subseteq Y$ aperto. Vogliamo vedere che $f^{-1}(A)$ è aperto in X , ovvero che $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto. Sia $\bar{x} \in f^{-1}(A)$ e verifichiamo che $\bar{x} \in \text{int}(f^{-1}(A))$ con il criterio delle successioni (qui usiamo l'ipotesi di I-numerabilità).

Se $x_n \rightarrow \bar{x}$ e f è continua per successioni abbiamo che $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$. Essendo A aperto, esso è un intorno di $f(\bar{x})$, quindi $f(x_n) \in A$ definitivamente, ovvero $x_n \in f^{-1}(A)$ definitivamente. Abbiamo quindi per il criterio che $\bar{x} \in \text{int}(f^{-1}(A))$ che è ciò che volevamo mostrare. \square

Possiamo riassumere questi risultati nella seguente

Proposizione 2.99.

Se $Y \subseteq X$ e $f : X \rightarrow Z$ allora

- se Y è chiuso, è chiuso per successioni
- se Y è aperto, è aperto per successioni
- se f è continua allora è continua per successioni.

Se X è I-numerabile allora le implicazioni sopra sono equivalenze.

2.4 Topologia di sottospazio

Definizione 2.100 (Topologia di sottospazio).

Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. La **topologia di sottospazio** di Y è la topologia meno fine che rende l'inclusione $i : Y \rightarrow X$ continua.

La definizione è ben posta in quanto la topologia discreta rende l'inclusione continua e l'intersezione di topologie è sempre una topologia.

Proposizione 2.101 (Caratterizzazione della topologia di sottospazio).

La topologia di sottospazio di Y è $\tau|_Y = \{B \subseteq Y \mid \exists A \in \tau_X \text{ t.c. } B = Y \cap A\}$, cioè sono le intersezioni di aperti globali con l'insieme.

Dimostrazione.

È topologia) Osserviamo che $Y = X \cap Y$ e $\emptyset = \emptyset \cap Y$. Se A, B sono aperti in X , $(Y \cap A) \cap (Y \cap B) = Y \cap (A \cap B)$ e $A \cap B$ è aperto in Y . Se A_i è aperto in X per ogni $i \in I$, $\bigcup_{i \in I} Y \cap A_i = Y \cap \bigcup_{i \in I} A_i$ e $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto in X .

è la top. di ssp.) Se τ' è tale che $i : (Y, \tau') \rightarrow (X, \tau_X)$ è continua allora $i^{-1}(A) \in \tau'$. Dato che $i^{-1}(A) = Y \cap A$ vediamo che $\tau|_Y \subseteq \tau'$. Essendo la topologia di sottospazio la meno fine ed essendo $\tau|_Y$ una topologia abbiamo che questa è proprio la topologia di sottospazio. \square

Se non specifichiamo altrimenti considereremo ogni sottospazio dotato della topologia di sottospazio.

Osservazione 2.102.

Dalla definizione segue che i chiusi della topologia di sottospazio sono della forma $Y \cap C$ con C chiuso in X .

Osservazione 2.103.

Se \mathcal{B} è una base di τ , $\mathcal{B}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$ è una base di $\tau|_Y$.

Proposizione 2.104 (Aperto di un aperto e Chiuso di un chiuso).

Y è aperto in X se e solo se tutti gli aperti in Y sono aperti in X. Y è chiuso in X se e solo se ogni chiuso in Y è chiuso in X.

Dimostrazione.

\Rightarrow) Sia A un aperto di Y , ovvero esiste B aperto in X tale che $A = B \cap Y$. Essendo sia B che Y aperti in X , anche A è aperto in X .

\Leftarrow) Se ogni aperto di Y è aperto in X , in particolare Y stesso è aperto in X . (*chiusi*) La logica passa senza modifiche se non scambiare la parola “aperto” con “chiuso”. \square

Proposizione 2.105 (Proprietà universale della topologia di sottospazio).

Siano X, Z spazi topologici e sia $Y \subseteq Z$. Data una mappa $f : X \rightarrow Y$ e chiamando $i : Y \rightarrow Z$, f è continua se e solo se $i \circ f : X \rightarrow Z$ è continua.

Dimostrazione.

Chiamando τ_X, τ_Y, τ_Z le topologie di X, Y e Z , vale la seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} & i \circ f \text{ continua} \\ & \forall A \in \tau_Z, (i \circ f)^{-1}(A) \in \tau_X \\ & \forall A \in \tau_Z, f^{-1}(i^{-1}(A)) = f^{-1}(A \cap Y) \in \tau_X \\ & \forall A \in \tau_Y, f^{-1}(A) \in \tau_X \\ & f \text{ continua.} \end{aligned}$$

\square

Proposizione 2.106 (Restrizione di continua è continua).

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua, $Z \subseteq X$. Allora $f|_Z : Z \rightarrow Y$ è continua

Dimostrazione.

Se A è un aperto in Y , $(f|_Z)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap Z$. Per la continuità di f , $f^{-1}(A)$ è aperto in X , quindi $f^{-1}(A) \cap Z$ è aperto in Z . \square

Lemma 2.107 (Chiusura in sottospazi).

Siano X uno spazio topologico e $A \subseteq Z \subseteq X$. Allora la chiusura di A in Z (che indicheremo con \overline{A}^Z) coincide con $\overline{A} \cap Z$, dove \overline{A} è la chiusura di A in X .

Dimostrazione.

$$\overline{A}^Z = \bigcap_{\substack{C_Z \text{ chiuso in } Z \\ A \subseteq C_Z}} C_Z = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso in } X \\ A \subseteq C \cap Z}} C \cap Z = Z \cap \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso in } X \\ A \subseteq C}} C = Z \cap \overline{A}.$$

□

Osservazione 2.108.

Questo è falsissimo per le parti interne, per esempio $\{0\} \subseteq \{0\} \subseteq \mathbb{R}$. Chiaramente $\text{int}_{\{0\}}(\{0\}) = \{0\}$ ma $\text{int}_{\mathbb{R}}(\{0\}) \cap \{0\} = \emptyset \cap \{0\} = \emptyset$.

Vediamo quali proprietà di numerabilità passano a sottospazi:

Proposizione 2.109.

Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$.

1. Se X è II-numerabile allora Y è II-numerabile
2. Se X è I-numerabile allora Y è I-numerabile
3. Se X è separabile NON sempre Y è separabile
4. Se X è metrizzabile allora Y è metrizzabile e la topologia di sottospazio è la topologia indotta dalla metrica di X ristretta a Y
5. Se X è metrizzabile e separabile allora Y è separabile

Dimostrazione.

1) Se \mathcal{B} è una base numerabile di X allora $\mathcal{B}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$ è una base numerabile di Y .

2) Dato $y \in Y$, sia U_y un sistema fondamentale di intorni numerabile per y in X . Affermo che $U'_y = \{U \cap Y \mid U \in U_y\}$ è un SFI di y in Y numerabile. Chiaramente è numerabile e i suoi elementi sono intorni di y in Y , quindi basta verificare che è un SFI. Sia V un intorno di y in Y e sia $\overset{\circ}{V}$ la parte aperta di V (in X o Y è irrilevante dato che $\overset{\circ}{V} \subseteq V \subseteq Y$). Osserviamo che, dato che $y \in \overset{\circ}{V}$ che è un aperto di X , V è un intorno di y anche in X . Allora esiste $U \in U_y$ tale che $U \subseteq V \subseteq Y$. Osserviamo quindi che $U = U \cap Y$ e quindi $U \in U'_y$, dunque abbiamo trovato un elemento di U'_y contenuto in V .

3) Consideriamo un Y non separabile, per esempio un insieme non numerabile con la topologia discreta. Costruiamo $X = Y \sqcup \{\infty\}$ dove ∞ è un simbolo arbitrario. Dotiamo X della seguente topologia: $A \subseteq X$ è aperto in X se e solo se $A = \emptyset$ oppure $A = B \sqcup \{\infty\}$ con B aperto di Y . È immediato verificare che questa è una topologia, basta sfruttare gli assiomi di topologia in Y scrivendo $\sqcup \{\infty\}$ alla fine di ogni termine.

Osserviamo che per costruzione $\{\infty\}$ è denso in X e quindi X è separabile, eppure $Y = X \setminus \{\infty\}$ è un sottospazio che mantiene la topologia che avevamo richiesto in partenza, e quindi non è separabile.

4) Sia d la distanza su X e siano τ la topologia che induce su X , τ_Y la topologia di Y come sottospazio e τ' la topologia indotta da d su Y . La tesi equivale a mostrare che $\tau_Y = \tau'$.

\supseteq) Ovvio, infatti

$$B_{d|_Y}(x, R) = \{y \in Y \mid d(x, y) < R\} = B_d(x, R) \cap Y$$

e sappiamo che le palle sono una base di τ' .

\subseteq) Osserviamo che l'inclusione $i : Y \rightarrow X$ è 1-lipschitziana (addirittura è un embedding isometrico dato che siamo su spazi metrici), quindi $\tau_Y \subseteq \tau'$ dato che τ_Y è la topologia meno fine che rende l'inclusione continua.

5) Su spazi metrici, essere separabile ed essere secondo numerabile sono equivalenti, quindi la tesi vale applicando il primo e il quarto punto. \square

2.5 Mappe aperte e chiuse

Definizione 2.110 (Mappe aperte e chiuse).

Sia $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici. f è **aperta** se $f(A)$ è aperto in Y per ogni A aperto in X . Analogamente f è **chiusa** se per ogni chiuso C di X , $f(C)$ è chiuso in Y .

Lemma 2.111 (Funzione aperta se e solo se aperta su base).

Data $f : X \rightarrow Y$ e \mathcal{B} una base di X , f è aperta se e solo se $f(B)$ è aperto in Y per ogni $B \in \mathcal{B}$.

Dimostrazione.

\implies) Ovvio.

\impliedby) Dato A è aperto in X lo scriviamo come unione di aperti base $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ con $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Segue che

$$f(A) = f\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B)$$

ed essendo $f(B)$ aperto in Y per ipotesi, $f(A)$ è aperto di Y in quanto unione di aperti. \square

Definizione 2.112 (Immersione topologica).

Una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ è una **immersione topologica** se è un omeomorfismo tra X e $f(X)$.

Osservazione 2.113.

Ricordiamo che se $f : X \rightarrow Y$ è continua e bigettiva, f non è sempre un omeomorfismo.

Osservazione 2.114.

Se f^{-1} è continua allora per A aperto in X , $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ è aperto in Y . Analogamente per i chiusi.

Proposizione 2.115 (Caratterizzazione delle immersioni topologiche in aperti / chiusi).

Se $f : X \rightarrow Y$ è continua e iniettiva allora

- f chiusa $\iff f$ immersione topologica in un chiuso di Y
- f aperta $\iff f$ immersione topologica in un aperto di Y

Dimostrazione.

\implies) Dato che X è chiuso in sé, $f(X)$ è chiuso in Y . Poiché f è iniettiva $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ è ben definita. Se C è un chiuso in X allora $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ è chiuso in Y , ovvero f^{-1} è continua.

\impliedby) Abbiamo che $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ è continua, dunque per C chiuso in X abbiamo che $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ è un chiuso, quindi f è chiusa.

Nel caso degli aperti la dimostrazione è identica, basta sostituire “chiuso” con “aperto”. \square

Osservazione 2.116.

Esistono immersioni topologiche né aperte né chiuse, per esempio $i : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

2.6 Prodotti

Consideriamo ora un modo per costruire spazi a partire da altri spazi.

Definizione 2.117 (Prodotto cartesiano).

Data $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi, il loro **prodotto (cartesiano)** è dato da

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I, f(i) \in X_i \right\}.$$

L'elemento $f \in \prod_{i \in I} X_i$ viene spesso denotato con $(f(i))_{i \in I}$, cioè una stringa di elementi $(x_i)_{i \in I}$ con $x_i \in X_i$ per ogni $i \in I$.

Chiamiamo $x_i = f(i)$ la **coordinata i -esima** di $f = (x_i)_{i \in I}$.

Sul prodotto $\prod_{i \in I} X_i$ è definita la **proiezione i -esima** per ogni $i \in I$, ovvero è definita la mappa

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j \in I} X_j & \longrightarrow & X_i \\ \pi_i : & & \\ f & \longmapsto & f(i) \end{array}$$

o equivalentemente $\pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$.

Definizione 2.118 (Diagonale).

La **diagonale** di X è il seguente sottoinsieme di $X \times X$

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Se gli X_i sono spazi topologici, vorremmo definire una topologia sul prodotto:

Definizione 2.119 (Topologia prodotto).

Siano (X_i, τ_i) spazi topologici per ogni $i \in I$. La **topologia prodotto** su $\prod_{i \in I} X_i$ è la topologia meno fine che rende ogni proiezione i -esima continua.

Proposizione 2.120 (Caratterizzazione della topologia prodotto).

La topologia prodotto τ di $\prod_{i \in I} X_i$ è ben definita ed ammette come prebase l'insieme

$$\{\pi_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i, i \in I\} = \{\{(x_j)_{j \in I} \mid x_i \in A\} \mid A \in \tau_i, i \in I\}$$

Dimostrazione.

Affinché ogni π_i sia continua, è necessario e sufficiente che τ contenga gli elementi descritti sopra. Segue che la topologia prodotto è la più piccola topologia che contiene gli elementi sopra, ovvero è la topologia che ha come prebase l'insieme sopra unito con $\{\prod_{i \in I} X_i\}$. In realtà questa aggiunta è superflua dato che

$$\prod_{i \in I} X_i = \pi_i^{-1}(X_i).$$

□

Corollario 2.121.

Una base della topologia prodotto τ è data da

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^k \pi_{i_j}^{-1}(A_j) \mid k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in I, A_j \in \tau_{i_j} \forall j \in I \right\}.$$

Inoltre se \mathcal{B}_j è una base di τ_j allora una base di τ è data da

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^k \pi_{i_j}^{-1}(A_j) \mid k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in I, A_j \in \mathcal{B}_j \forall j \in I \right\}.$$

Osservazione 2.122.

Se I è finito possiamo semplificare la scrittura della base di τ in

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \dots \times A_{\#I} \mid A_i \in \tau_i\}$$

Infatti $\bigcap_{i=1}^{\#I} \pi_i^{-1}(A_i) = A_1 \times \dots \times A_{\#I}$.

Se invece I è infinito vediamo che un generico aperto nella base di τ standard descritta sopra è dato da $\prod_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \tau_i$ ma $A_i = X_i$ eccetto che per un numero finito di entrate.

Definizione 2.123 (Box topology).

La topologia su $\prod_{i \in I} X_i$ data da $\{\prod_{i \in I} A_i \mid A_i \in \tau_i\}$ è detta **box topology** sul prodotto. Se I è finito la box topology e la topologia prodotto coincidono.

Proposizione 2.124 (Prodotto di chiusi è chiuso).

Se $C_i \subseteq X_i$ sono chiusi allora $\prod_{i \in I} C_i$ è chiuso in $\prod_{i \in I} X_i$.

Dimostrazione.

Osserviamo che

$$\prod_{i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(C_i).$$

Per continuità delle proiezioni $\pi_i^{-1}(C_i)$ è chiuso, quindi $\prod_{i \in I} C_i$ è intersezione di chiusi. □

Proposizione 2.125 (Prodotto finito di metrici è metrico).

Dati (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici con topologie indotte τ_X, τ_Y , la topologia prodotto su $X \times Y$ (che denotiamo $\tau_X \times \tau_Y$) coincide con la topologia indotta su $X \times Y$ da

$$d_\infty((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

In particolare il prodotto finito di spazi metrizzabili è metrizzabile.

Dimostrazione.

Sia τ la topologia indotta da d_∞ . Osserviamo che

$$\pi_X : (X \times Y, d_\infty) \rightarrow (X, d_X)$$

è 1-Lipschitziana per definizione di massimo, e quindi è continua. Analogamente π_Y è continua, dunque per definizione di topologia prodotto $\tau_X \times \tau_Y$ è meno fine di τ .

Per concludere basta verificare che un aperto della base standard di τ è aperto per $\tau_X \times \tau_Y$. Sia $B_{d_\infty}((x, y), R)$ un tale aperto. Dalla definizione di d_∞ si ha che

$$B_{d_\infty}((x, y), R) = B_{d_X}(x, R) \times B_{d_Y}(y, R)$$

che è un aperto di $\tau_X \times \tau_Y$. □

Osservazione 2.126.

Essendo le metriche p equivalenti su \mathbb{R}^{n2} (e in particolare \mathbb{R}^2) il risultato vale anche per d_2 e d_1 . Segue immediatamente, per esempio, che $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$

Proposizione 2.127 (Prodotto numerabile di metrici è metrico).

Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di spazi metrici, allora

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

è metrico.

Dimostrazione.

Ricordiamo che se (X_i, d_i) è uno spazio metrico allora esso è topologicamente equivalente ad uno spazio metrico limitato (X_i, d'_i) (proposizione 2.40). Supponiamo dunque che per ogni X_i , $d_i \leq 1$. Definiamo quella che vorremo mostrare essere una metrica su X che induce la topologia prodotto:

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i).$$

è una metrica) Osserviamo che $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \in \mathbb{R}$, infatti

$$|d(x, y)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |2^{-i}| |d_i(x_i, y_i)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Dato che ogni addendo è non negativo, anche $d(x, y)$ è non negativo. Quindi d è ben definita, vediamo che rispetta gli assiomi di distanza:

- Se $x = y$ allora $x_i = y_i$, da cui $d(x, y) = \sum 0 = 0$. Se invece $d(x, y) = 0$ allora necessariamente $d(x_i, y_i) = 0$, quindi $x_i = y_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, cioè $x = y$.
- Evidentemente $d(x, y) = d(y, x)$.

²Lo mostreremo nel capitolo sulla compattezza. (2.302)

- Segue dal seguente conto:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum 2^{-i} d_i(x_i, y_i) \leq \\ &\leq \sum 2^{-i} d_i(x_i, z_i) + \sum 2^{-i} d_i(y_i, z_i) = \\ &= d(x, z) + d(y, z). \end{aligned}$$

Più fine della topologia prodotto) Verifichiamo che $\pi_i : (X, \tau_d) \rightarrow (X_i, \tau_{d_i})$ è continua. Se questo vale allora la topologia indotta da d è più fine della topologia prodotto, che è la meno fine per la quale le proiezioni sono continue per definizione.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta = 2^{-k}\varepsilon$. Osserviamo che se $y \in B_d(x, \delta)$ allora

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} d_i(x_i, y_i) < 2^{-k}\varepsilon \implies \\ \implies 2^{-k} d_k(x_k, y_k) + \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \{k\}} 2^{-i} d_i(x_i, y_i)}_{\geq 0} &< 2^{-k}\varepsilon \implies \\ \implies d_k(x_k, y_k) &< \varepsilon, \end{aligned}$$

cioè $\pi_k(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d_k}(x_k, \varepsilon)$. Abbiamo quindi verificato che π_k è continua in ogni punto di X , cioè X è continua.

Meno fine della topologia prodotto) Per definizione della topologia indotta da una metrica sappiamo che se U è un aperto metrico allora per ogni punto $x \in U$ esiste una palla $B = B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$. Se riusciamo a mostrare che per ogni palla esiste un aperto della topologia prodotto contenuto nella palla contenente il centro avremo mostrato la tesi ricordando che U è unione dei suoi punti ma anche delle palle centrate in quei punti.

Mostriamo allora che per ogni palla $B = B_d(x, \varepsilon)$ esiste un aperto di base della topologia prodotto contenuto nella palla che contiene x . Sia N un naturale tale che $2^{-N} < \varepsilon/2$ e per ogni $i \in \{0, \dots, N\}$ poniamo

$$B_i = B_{d_i}(x_i, \varepsilon/2).$$

Per definizione, se $y \in \bigcap_{i=0}^N \pi_i^{-1}(B_i)$ allora per ogni $i \leq N$ si ha che

$$d_i(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) < \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^N}\right)}_{\in(0,1)} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^N} \cdot 1 < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

cioè $\bigcap_{i=0}^N \pi_i^{-1}(B_i) \subseteq B$ come voluto. \square

Osservazione 2.128.

Il prodotto più che numerabile di spazi metrici può non essere metrico (2.380).

2.6.1 Proiezioni da un prodotto in un fattore

Teorema 2.129 (Proprietà universale del prodotto).

Se X_i sono spazi topologici per ogni $i \in I$ e Y è un altro spazio topologico, data $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ si ha che

$$f \text{ continua} \iff \pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i \text{ è continua } \forall i \in I.$$

Dimostrazione.

\implies) Le π_i sono continue per definizione di topologia prodotto, quindi $\pi_i \circ f$ è composizione di continue.

\impliedby) Basta verificare la continuità sugli aperti di una prebase. Consideriamo la prebase $\{\pi_i^{-1}(A) \mid i \in I \text{ e } A \subseteq X_i \text{ aperto}\}$. Per un aperto di quella forma si ha $f^{-1}(B) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A)$, che è aperto in Y per ipotesi. Abbiamo quindi verificato che f è continua. \square

Teorema 2.130 (Le proiezioni sono aperte).

Se X_i sono spazi topologici per ogni $i \in I$, le proiezioni π_i sono aperte per ogni $i \in I$.

Dimostrazione.

Grazie al lemma (2.111) basta verificare che $\pi_i(B)$ è aperto in X_i dove B è in una base di $\prod_{i \in I} X_i$. Usiamo la base già discussa, il cui aperto generico è della forma

$$A = \pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}), \quad i_1, \dots, i_k \in I, \quad A_j \subseteq X_j \text{ aperto.}$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $j \neq h \implies i_j \neq i_h$. Dobbiamo verificare che $\pi_i(A)$ è aperto in X_i .

- Se $i = i_h$ per qualche h allora $\pi_i(A) = A_{i_h}$, che è aperto in $X_i = X_{i_h}$.
- Se $i \neq i_h$ per ogni h allora $\pi_i(A) = X_i$, che è aperto in X_i .

\square

Osservazione 2.131.

Le proiezioni non sono sempre chiuse (2.382).

2.6.2 Immersioni dei fattori nel prodotto

Proposizione 2.132 (Immersioni dei fattori nei prodotti).

Fissiamo $k \in I$ un indice e $x_i \in X_i$ per ogni $i \neq k$. Allora la funzione

$$j : \begin{array}{l} X_k \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \prod_{i \in I} X_i, \quad y_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \neq k \\ x & \text{se } i = k \end{cases}$$

è una immersione topologica.

Dimostrazione.

Osserviamo che

$$\pi_i \circ j = \begin{cases} x \mapsto x_i & \text{se } i \neq k \\ id_{X_k} & \text{se } i = k \end{cases},$$

quindi $\pi_i \circ j$ è continua per ogni i , dunque j stessa è continua. Osserviamo anche che, essendo $\pi_k \circ j = id_{X_k}$ bigettiva, j è iniettiva.

Dobbiamo solo verificare che $j : X_k \rightarrow j(X_k)$ è un omeomorfismo. Basta vedere che $j^{-1} : j(X_k) \rightarrow X_k$ è continua. Osserviamo però che

$$j^{-1} = \pi_k|_{j(X_k)},$$

che è chiaramente continua in quanto restrizione di continua. \square

Con la stessa dimostrazione troviamo il seguente fatto più generale

Proposizione 2.133.

Se $I' \subseteq I$ e fissiamo $x_i \in X_i$ per $i \notin I'$ allora

$$j : \prod_{i \in I'} X_i \times \prod_{(x_h)_{h \in I'}} \rightarrow \prod_{i \in I} X_i, \quad y_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \notin I' \\ x_h & \text{se } i = h \in I' \end{cases}$$

è un'immersione topologica.

2.6.3 Topologia della convergenza puntuale

Definizione 2.134.

Sia Y uno spazio topologico e X un insieme. Definiamo

$$\{f : X \rightarrow Y\} = \prod_{x \in X} Y = Y^X$$

e la topologia prodotto su questo spazio è detta **topologia della convergenza puntuale**.

Proposizione 2.135.

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni in Y^X , allora $f_n \rightarrow f$ in questa topologia se e solo se per ogni $x \in X$ si ha $f_n(x) \rightarrow f(x)$ in Y .

Dimostrazione.

\Rightarrow) Le proiezioni sono funzioni continue dunque $f_n(x) = \pi_x(f_n) \rightarrow \pi_x(f) = f(x)$.

\Leftarrow) Sia U un intorno di f in Y^X e scegliamo un aperto di base A tale che $f \in A \subseteq U$. Si ha che $A = \prod_{x \in X} A_x$ dove A_x è un aperto di Y e $A = Y$ eccetto che per un numero finito di elementi di X (che indichiamo x_1, \dots, x_k). Dato che $f_n(x_i) \rightarrow f(x_i)$ per ipotesi si ha che definitivamente $f_n(x_i) \in A_{x_i}$ in quanto quest'ultimo è intorno di $f(x_i)$. Dato che i punti sono in numero finito si ha che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N, f_n(x_i) \in A_{x_i}$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$. Dato che per gli altri punti di X si ha $A_x = Y$ osserviamo che definitivamente $f_n(x) \in A_x$ per ogni $x \in X$, cioè $f_n \in A \subseteq U$ come voluto. \square

2.7 Assiomi di separazione

Consideriamo adesso diversi modi in cui i punti del nostro spazio possono essere distinti gli uni dagli altri. Più assiomi di separazione vengono rispettati, più modi abbiamo per scegliere intorni dei nostri punti. Se non vengono rispettati

degli assiomi di separazione lo spazio ha un aspetto più spigoloso o appiccicoso (ci sono punti vicini a tanti altri), mentre più assiomi di separazione vengono rispettati, più lo spazio topologico comincia a diventare simile agli spazi ai quali siamo comunemente abituati (per esempio, tutti gli spazi metrici sono almeno spazi di Hausdorff).

Definizione 2.136 (Assiomi di separazione).

Sia X uno spazio topologico. Affermiamo che X soddisfa l'assioma

- T_0 se $\forall x \neq y \in X$ esiste U aperto in X tale che $x \in U$ e $y \notin U$ o viceversa.
- T_1 se $\forall x \neq y \in X$ esistono U, V aperti in X tali che $x \in U$, $y \notin U$ e $x \notin V$, $y \in V$.
- T_2 se $\forall x \neq y \in X$ esistono U, V aperti in X tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Se X soddisfa T_2 viene detto **spazio di Hausdorff**.

Osservazione 2.137.

Definizioni analoghe ed equivalenti si ottengono considerando intorni al posto di aperti.

Osservazione 2.138.

$T_2 \implies T_1 \implies T_0$ e queste sono implicazioni strette (2.383).

Osservazione 2.139.

Non tutti gli spazi topologici sono T_0 , per esempio se $\#X \geq 2$ allora la topologia indiscreta su X non è T_0 .

Proposizione 2.140 (Gli spazi metrici sono Hausdorff).

Se (X, d) è uno spazio metrico allora la topologia indotta da d su X è T_2 .

Dimostrazione.

Se $x \neq y$ in X posso separarli usando le palle aperte $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$ e $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$, le quali sono disgiunte e non vuote. \square

Proposizione 2.141 (Caratterizzazione degli spazi T_1).

Uno spazio topologico X è T_1 se e solo se i punti sono chiusi, che succede se e solo se la topologia di X è più fine della topologia cofinita.

Dimostrazione.

Una topologia è più fine della cofinita se ogni chiuso cofinito (insieme finito) è anche chiuso per la topologia, e dato che i singoletti sono finiti abbiamo che la topologia deve vedere i singoletti come chiusi. Viceversa se i singoletti sono chiusi, la loro unione finita restituisce ogni insieme finito, dunque gli insiemi finiti devono essere chiusi e quindi la topologia è più fine della cofinita.

Mostriamo ora la prima equivalenza.

\implies) Supponiamo che X sia T_1 . Vorrei verificare che $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Sicuramente $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$, quindi dobbiamo solo mostrare l'altra inclusione. Osserviamo che

$$\overline{\{x\}} = \{y \in X \mid \forall A \text{ aperto t.c. } y \in A, x \in A\}.$$

Se $y \neq x$, essendo X T_1 trovo un aperto V in X tale che $y \in V$ ma $x \notin V$. L'esistenza di V implica che $y \notin \overline{\{x\}}$, quindi $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

\Leftarrow) Supponiamo che $\overline{\{x\}} = \{x\}$ e consideriamo $y \in X \setminus \{x\}$. Essendo $\{x\}$ chiuso, $X \setminus \{x\}$ è aperto e $y \in X \setminus \{x\}$ ma $x \notin X \setminus \{x\}$. Sappiamo anche che $\{y\}$ è chiuso e quindi per un ragionamento analogo $X \setminus \{y\}$ è un aperto che contiene x ma non y . \square

Proposizione 2.142 (Caratterizzazione degli spazi T_2).

X è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è un chiuso di $X \times X$.

Dimostrazione.

Osservo che $(x, y) \in \Delta_X \iff x = y$ e quindi $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X \iff x \neq y$. Consideriamo la seguente catena di equivalenze:

- Δ_X chiuso in $X \times X$
- $X \times X \setminus \Delta_X$ è aperto in $X \times X$
- $\forall (x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$ esiste un aperto (di base) $A \times B$ di $X \times X$ tale che $(x, y) \in A \times B \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$
- $\forall x, y$ tali che $x \neq y$ esiste un aperto $A \times B$ di $X \times X$ tale che $(x, y) \in A \times B \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$
- $\forall x, y$ tali che $x \neq y$ esistono A, B aperti in X tali che $x \in A, y \in B$ e $(A \times B) \cap \Delta_X = \emptyset$
- $\forall x, y$ tali che $x \neq y$ esistono A, B aperti in X tali che $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

L'equivalenza tra la prima affermazione e l'ultima è la tesi. \square

Corollario 2.143.

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua con Y di Hausdorff, allora il grafico di f ($\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$) è un chiuso.

Dimostrazione.

Osserviamo che $F : \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \times Y \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x), y) \end{array}$ è continua (le componenti sono continue). Chiaramente $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta_Y)$ che è chiuso dato che Δ_Y è chiuso, essendo Y di Hausdorff. \square

Corollario 2.144.

Siano $f, g : X \rightarrow Y$ continue e Y di Hausdorff, allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$ è un chiuso.

Dimostrazione.

$F : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \times Y \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$ è continua (componenti continue) e l'insieme nell'enunciato è $F^{-1}(\Delta_Y)$. \square

Corollario 2.145 (Funzioni continue concordanti su un denso in T_2 coincidono).

Siano $f, g : X \rightarrow Y$ continue e Y di Hausdorff, allora se $f = g$ su un denso di X , $f = g$ come funzioni da $X \rightarrow Y$, infatti un chiuso che contiene un denso è tutto lo spazio.

Corollario 2.146.

Se $f : X \rightarrow X$ è continua e X è T_2 allora $\text{Fix}(f)$ è un chiuso di X .

Dimostrazione.

Dal secondo corollario sappiamo che $\{f(x) = \text{id}_X(x) = x\}$ è un chiuso. \square

Teorema 2.147 (Unicità del limite per Hausdorff).

Se X è T_2 , x_n è una successione a valori in X e $x_n \rightarrow x$, $x_n \rightarrow y$ con $x, y \in X$, allora $x = y$.

Dimostrazione.

Per assurdo supponiamo $x \neq y$, allora essendo X di Hausdorff trovo U, V aperti in X tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Osservo che U è un intorno di x e V è un intorno di y . Essendo x un limite di x_n abbiamo che $x_n \in U$ definitivamente. Analogamente $x_n \in V$ definitivamente, quindi $x_n \in U \cap V = \emptyset$ definitivamente, che è assurdo. \neq \square

Proposizione 2.148 (Primi assiomi di separazione sono stabili per sottospazi, prodotti e raffinamenti).

Per $i = 0, 1, 2$ vediamo che

1. Sottospazi di spazi T_i sono T_i
2. Prodotti di spazi T_i sono T_i
3. Raffinamenti di topologie T_i sono T_i .

Dimostrazione.

Consideriamo solo $i = 2$ dato che le dimostrazioni per gli altri due casi sono analoghe.

1) Se X è T_2 e Y è un suo sottospazio, se $x \neq y$ in Y posso trovare U, V aperti di X tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Ponendo $U' = U \cap Y$ e $V' = V \cap Y$ troviamo aperti di Y con $x \in U'$, $y \in V'$ e

$$U' \cap V' = U \cap V \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset.$$

2) Se X_i è uno spazio T_2 per ogni $i \in I$ consideriamo $X = \prod_{i \in I} X_i$. Dati $x = (x_i)_{i \in I}$ e $y = (y_i)_{i \in I}$ due punti di X con $x \neq y$, cioè esiste $i_0 \in I$ tale che $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, visto che X_{i_0} è T_2 posso trovare U, V aperti di X_{i_0} tali che $x_{i_0} \in U$, $y_{i_0} \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Ponendo $U' = \pi_{X_{i_0}}^{-1}(U)$ e $V' = \pi_{X_{i_0}}^{-1}(V)$ ho due aperti di X tali che $x \in U'$, $y \in V'$ e

$$U' \cap V' = \pi_{X_{i_0}}^{-1}(U \cap V) = \pi_{X_{i_0}}^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

3) Se X è un insieme e $\tau \subseteq \tau'$ sono due topologie dove τ è T_2 allora anche τ' è T_2 , infatti per x, y funzioneranno gli stessi aperti che funzionavano in τ . \square

Le proprietà sopra ci informano che T_0 , T_1 e T_2 sono in un certo concetti di separazione fondamentali e stabili. Questi assiomi ci permettono di distinguere punti, ma non dicono niente sugli insiemi, è quindi possibile per esempio non trovare aperti che separano punti da chiusi disgiunti. Seguono allora i seguenti

Definizione 2.149 (Assiomi di separazione 3 e 4).

Uno spazio topologico X si dice

- T_3 se $\forall x \in X$ e per ogni C chiuso in X tale che $x \notin C$ esistono U, V aperti in X tali che $x \in U$, $C \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.
- T_4 se per ogni C, D chiusi in X tali che $C \cap D = \emptyset$ esistono U, V aperti in X tali che $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Osservazione 2.150.

Se X è T_1 allora $T_4 \implies T_3 \implies T_2$.

Osservazione 2.151.

Se X non è T_1 allora è possibile che X sia T_4 o T_3 senza essere T_2 , T_1 o T_0 (2.384).

Definizione 2.152 (Regolari e Normali).

Affermiamo che uno spazio è **regolare** se è T_1 e T_3 . Affermiamo che uno spazio è **normale** se è T_1 e T_4 .

Osservazione 2.153.

Normale \implies Regolare \implies Hausdorff e le implicazioni sono strette (per esempio il piano di Sorgenfrey (2.389) è regolare ma non normale e l'esempio (2.390) mostra uno spazio Hausdorff non regolare).

Mostriamo che gli spazi metrici sono normali. Per fare ciò abbiamo bisogno di un paio di lemmi:

Lemma 2.154.

La distanza punto-insieme è 1-Lipschitziana, in particolare è continua.

Dimostrazione.

Fissiamo $x, y \in X$. Per ogni $a \in A$ la disuguaglianza triangolare ci dà

$$\begin{aligned} d(a, x) &\leq d(x, y) + d(y, a) \\ d_A(x) &= \inf\{d(a, x) \mid a \in A\} \leq d(x, y) + d(y, a) \\ d_A(x) &\leq d(x, y) + \inf\{d(y, a) \mid a \in A\} = d(x, y) + d_A(y) \\ d_A(x) - d_A(y) &\leq d(x, y). \end{aligned}$$

Scambiando x e y troviamo anche $d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$, quindi

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq 1 \cdot d(x, y).$$

□

Lemma 2.155 (La chiusura in un metrico sono i punti a distanza nulla).

Se X è uno spazio metrico e $A \subseteq X$ allora $d_A^{-1}(0) = \bar{A}$. In particolare se C è un chiuso allora $C = d_C^{-1}(0)$.

Dimostrazione.

Chiaramente $A \subseteq d_A^{-1}(0)$, quindi basta vedere che $d_A^{-1}(0) \subseteq \bar{A}$ e che $d_A^{-1}(0)$ è chiuso.

Essendo 0 chiuso in \mathbb{R} , vediamo che $d_A^{-1}(0)$ è chiuso per continuità, quindi $\bar{A} \subseteq d_A^{-1}(0)$.

Consideriamo ora $y \in X$ tale che $d_A(y) = 0$, cioè $\inf\{d(y, a) \mid a \in A\} = 0$. Sia a_n una successione in A tale che $d(y, a_n) < 1/n$, ovvero $a_n \in B(y, 1/n)$. Osserviamo che qualsiasi intorno di y interseca A , infatti esso contiene una palla centrata in y e quindi anche $B(y, 1/n) \ni a_n \in A$ definitivamente in n . Abbiamo quindi mostrato che $y \in \bar{A}$, cioè $d_A^{-1}(0) \subseteq \bar{A}$. □

Proposizione 2.156 (Spazi metrici sono normali).

Se (X, d) è uno spazio metrico allora X con la topologia indotta da d è normale.

Dimostrazione.

Abbiamo visto che uno spazio metrico è T_2 , quindi in particolare è T_1 . Basta verificare che è anche T_4 .

Dati C, D chiusi in X tali che $C \cap D = \emptyset$ consideriamo

$$f(x) = \frac{d_D(x)}{d_D(x) + d_C(x)} : X \rightarrow [0, 1].$$

La funzione è ben definita perché $d_D(x) \geq 0$, $d_C(x) \geq 0$, da cui il rapporto è compreso tra 0 e 1 se il denominatore non si annulla, ma $d_D(x) + d_C(x) = 0 \iff d_D(x) = d_C(x) = 0 \iff x \in \overline{C} = C$, $x \in \overline{D} = D$ ma dato che $C \cap D = \emptyset$ questo non accade.

Osserviamo inoltre che f è continua, in quanto composizione di

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ x & \longmapsto & (d_C(x), d_D(x)) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{y}{y+x}, \end{array}$$

che sono continue. Osserviamo ora che $f^{-1}(0)$ sono i punti di X a distanza nulla da D , ovvero $\overline{D} = D$, mentre $f^{-1}(1)$ sono i punti tali che $d_C(x) = 0$ e quindi $f^{-1}(1) = \overline{C} = C$. Possiamo allora considerare $U = f^{-1}((2/3, 1]) \subseteq X$, che è aperto in X dato che f è continua e $(2/3, 1]$ è aperto in $[0, 1]$, e $V = f^{-1}([0, 1/3))$, che è aperto per un motivo analogo. Si ha che $U \cap V = \emptyset$, dato che $[0, 1/3) \cap (2/3, 1] = \emptyset$ e che $C \subseteq U$, $D \subseteq V$, da cui la tesi. \square

Nella dimostrazione sopra abbiamo ricavato il seguente risultato nel caso di spazi metrici

Proposizione 2.157 (Lemma di Urysohn).

Se X è T_4 , dati C, D chiusi disgiunti esiste $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tale che

$$f^{-1}(0) \supseteq D, \quad f^{-1}(1) \supseteq C.$$

Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).

\square

Consideriamo ora alcune proprietà degli spazi T_3 e T_4

Proposizione 2.158 (Ereditarietà per sottospazi di T_3 e T_4).

Valgono le seguenti proprietà:

1. Sottospazi di spazi T_3 sono T_3
2. Sottospazi chiusi di spazi T_4 sono T_4

Dimostrazione.

1) Siano X uno spazio T_3 e Y un suo sottospazio. Se $x \in Y, C \subseteq Y$ con C chiuso in Y tale che $x \notin C$, per definizione di topologia di sottospazio esiste un chiuso C' di X tale che $C = C' \cap Y$. In X trovo U, V aperti disgiunti tali che $x \in U$ e $C' \subseteq V$. Ponendo $U' = Y \cap U$ e $V' = Y \cap V$ troviamo due aperti disgiunti di Y

tali che $x \in U'$ e $C = Y \cap C' \subseteq V'$, quindi Y è T_3 .

2) Siano X uno spazio T_4 , Y un chiuso in X e C, D chiusi in Y disgiunti. Essendo Y chiuso, C e D sono chiusi anche in X e dalla proprietà T_4 di X trovo U, V aperti disgiunti in X tali che $C \subseteq U$, $D \subseteq V$, da cui $U' = U \cap Y$ e $V' = V \cap Y$ sono aperti disgiunti in Y tali che $C \subseteq U'$ e $D \subseteq V'$. \square

Osservazione 2.159.

Sottospazi non chiusi di uno spazio T_4 possono non essere T_4 .

Proposizione 2.160 (Caratterizzazione di T_3 con intorni).

Uno spazio topologico X è T_3 se e solo se gli intorni chiusi dei punti formano sistemi fondamentali di intorni.

Dimostrazione.

I chiusi formano un SFI significa che per ogni $x \in X$, se U è un intorno di x allora esiste V aperto tale che $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Mostriamo le due implicazioni:
 \implies) Sia U un intorno di x . Senza perdita di generalità supponiamo U aperto. Osserviamo dunque che $X \setminus U$ è un chiuso e $x \notin X \setminus U$, dunque per la proprietà T_3 esistono A e B aperti disgiunti tali che $X \setminus U \subseteq A$ e $x \in B$. Sia $C = X \setminus A$, il quale è un chiuso contenuto in U che contiene B (e quindi x). Abbiamo quindi trovato un intorno chiuso di x contenuto in U .

\impliedby) Siano $x \in X$ e C chiuso in X tale che $x \notin C$. Osserviamo che $A = X \setminus C$ è un aperto e $x \in A$, dunque per ipotesi esiste un intorno V chiuso di x tale che $V \subseteq A$, cioè $C \subseteq X \setminus V$ dove $B = X \setminus V$ è un aperto. Per concludere basta osservare che $x \in \text{int}(V) \subseteq V$ e $V \cap B = \emptyset \implies \text{int}(V) \cap B = \emptyset$. \square

Proposizione 2.161 (Prodotti di T_3 sono T_3).

Dato un insieme di indici I , se X_i è uno spazio T_3 per ogni $i \in I$ allora

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ è uno spazio } T_3.$$

Dimostrazione.

Siano $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ e V aperto che lo contiene. Per la caratterizzazione (2.160) basta trovare U aperto tale che $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq V$. Sia $A = \prod_{i \in I} A_i$ un aperto di base (ricordiamo che $A_i = X_i$ eccetto che per un numero finito di entrate) tale che $x \in A \subseteq V$. Guardando quanto detto sulle componenti troviamo $x_i \in A_i$ con A_i aperto in X_i . Siano allora B_i aperti di X_i tali che

$$x_i \in B_i \subseteq \bar{B}_i \subseteq A_i.$$

Se $X_i = A_i$ allora poniamo $B_i = A_i = X_i$, che funziona in quanto sia aperto che chiuso. Questo ci servirà per garantire i passaggi successivi.

Consideriamo $B = \prod_{i \in I} B_i$. Questo è un aperto di base di X (dato che tutte le entrate sono X_i eccetto che per un numero finito). Osserviamo che

$$x \in \prod_{i \in I} B_i \subseteq \prod_{i \in I} \bar{B}_i \subseteq \prod_{i \in I} A_i.$$

Dato che $\prod_{i \in I} \bar{B}_i$ è chiuso (2.124), $\bar{B} \subseteq \prod_{i \in I} \bar{B}_i$, da cui la tesi. \square

Corollario 2.162.

Il prodotto di spazi regolari è regolare.

Osservazione 2.163.

Prodotti di spazi T_4 non sono sempre T_4 (2.389). Lo stesso esempio mostra che prodotto di spazi normali non sempre è normale.

Osservazione 2.164.

Raffinamenti di topologie T_3 o T_4 possono non essere T_3 o T_4 (un esempio con T_4 è il piano di Sorgenfrey (2.389)). Anche se aggiungere nuovi aperti non influisce su come potevamo distinguere i punti e i chiusi già presenti, raffinare introduce nuovi chiusi nella topologia e non è detto che si presentino gli aperti necessari per separarli.

2.8 Ricoprimenti fondamentali

Cominciamo ora ad approfondire i ricoprimenti. Spesso vogliamo studiare proprietà di uno spazio ricostruendole a partire da proprietà locali e i ricoprimenti, specialmente i ricoprimenti aperti, sono uno dei modi più versatili di farlo. In questa sezione introduciamo i tipi di ricoprimenti più utili.

Definizione 2.165 (Ricoprimento).

Sia X uno spazio topologico, un **ricoprimento** di X è una famiglia $\{B_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di X tale che

$$X = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Un ricoprimento è **aperto** (rispettivamente **chiuso**) se ogni B_i è aperto (rispettivamente chiuso).

Definizione 2.166 (Ricoprimento fondamentale).

Un ricoprimento $\{B_i\}_{i \in I}$ di X è **fondamentale** se $\forall A \subseteq X$, A è aperto se e solo se $A \cap B_i$ è aperto in B_i per ogni $i \in I$ (o equivalentemente A è chiuso se e solo se $A \cap B_i$ è chiuso in B_i per ogni $i \in I$).

Osservazione 2.167.

Osserviamo che se A è aperto/chiuso allora $A \cap B_i$ è aperto/chiuso in B_i per definizione di topologia di sottospazio, quindi l'unica implicazione rilevante è l'altra.

Teorema 2.168 (I ricoprimenti aperti sono fondamentali).

Ogni ricoprimento aperto è fondamentale.

Dimostrazione.

Sia $\{B_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X e sia A un sottoinsieme di X tale che $A \cap B_i$ è aperto in B_i per ogni $i \in I$. Allora, essendo B_i aperto in X , $A \cap B_i$ è aperto in X . Osserviamo inoltre che

$$\bigcup_{i \in I} A \cap B_i = A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = A \cap X = A,$$

quindi A è aperto in X in quanto unione di aperti di X . □

Osservazione 2.169.

I ricoprimenti chiusi non sono sempre fondamentali (2.391)

Teorema 2.170 (Incollamento delle funzioni).

Sia $\{B_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento fondamentale di X e sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione, allora

$$f \text{ continua} \iff f|_{B_i} : B_i \rightarrow Y \text{ continua } \forall i \in I$$

Dimostrazione.

\implies) Osserviamo che $f|_{B_i} = f \circ i$ con $i : B_i \rightarrow X$ l'inclusione, dunque $f|_{B_i}$ è composizione di continue.

\impliedby) Sia A aperto in Y . Poiché $f|_{B_i}$ è continua, $f|_{B_i}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap B_i$ è un aperto di B_i per ogni $i \in I$. Essendo il ricoprimento fondamentale $f^{-1}(A)$ è aperto in X e quindi f è continua. \square

Osservazione 2.171 (Funzioni definite a tratti).

Sia $X = A \cup B$ e definiamo $f : X \rightarrow Y$ come

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in A \\ h(x) & \text{se } x \in B \end{cases}, \quad \text{con } g : A \rightarrow Y, h : B \rightarrow Y.$$

Se $X = A \sqcup B$ ci sono poche speranze che il ricoprimento sia fondamentale (se lo fosse vedremo che questo implica che lo spazio è sconnesso), quindi per garantire una buona definizione poniamo che $g|_{A \cap B} = h|_{A \cap B}$. Vediamo che in questo caso, g, h continue e $\{A, B\}$ fondamentale ci permette di concludere che f è continua.

Osservazione 2.172.

Il metodo appena illustrato per definire funzioni continue definite a tratti è molto più efficiente e stabile rispetto al confrontare i limiti direzionali come si era abituati a fare dai corsi di analisi. In spazi topologici astratti quei limiti perdono quasi ogni significato (ricordiamo per esempio che il limite in spazi non T_2 può non essere unico (2.147)).

Usare solo aperti è un po' restrittivo, proviamo a costruire ricoprimenti fondamentali anche a partire da ricoprimenti chiusi. Vedremo che i ricoprimenti chiusi sono fondamentali se rispettano una particolare ipotesi di finitezza.

Definizione 2.173 (Famiglia localmente finita).

Sia X uno spazio topologico e sia $\{B_i\}_{i \in I}$ una famiglia di suoi sottoinsiemi. Essa è **localmente finita** se $\forall x \in X$ esiste U intorno di $x \in X$ tale che

$$|\{i \in I \mid U \cap B_i \neq \emptyset\}| \in \mathbb{N}.$$

Lemma 2.174 (Chiusura e unione finita commutano).

Sia X uno spazio topologico e siano C_1, \dots, C_k sottoinsiemi di X , allora

$$\overline{\bigcup_{i=1}^k C_i} = \bigcup_{i=1}^k \overline{C_i}.$$

Dimostrazione.

\supseteq) Per ogni $j \in I$, $C_j \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$, da cui

$$\overline{C_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} C_i} \implies \bigcup_{j \in I} \overline{C_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} C_i}.$$

⊆) Osserviamo ora che per ogni i , $C_i \subseteq \overline{C_i}$, quindi

$$\bigcup_{i=1}^k C_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{C_i},$$

che è un chiuso perché unione finita di chiusi. Dalla definizione di chiusura abbiamo quindi che $\overline{\bigcup_{i=1}^k C_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{C_i}$. \square

Osservazione 2.175.

Osserviamo che $\bigcup_{j \in I} \overline{C_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} C_i}$ vale per unioni arbitrarie.

Lemma 2.176 (Chiusura e unione localmente finita commutano).

Sia $\{C_i\}_{i \in I}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi di X , allora

$$\overline{\bigcup_{i \in I} C_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{C_i}.$$

Dimostrazione.

Per quanto detto dobbiamo solo mostrare che $\overline{\bigcup_{i \in I} C_i} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{C_i}$.

Sia allora $x_0 \in \overline{\bigcup_{i \in I} C_i}$. Per la locale finitezza esiste U intorno di x_0 tale che

$$I_{x_0} = \{i \in I \mid U \cap C_i \neq \emptyset\}$$

è finito. Se V è un intorno di x_0 allora $U \cap V$ è un intorno di x_0 , quindi $U \cap V \cap \bigcup_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ per la caratterizzazione della chiusura. Essendo $U \cap C_i = \emptyset$ per ogni $i \notin I_{x_0}$ vediamo che

$$\emptyset \neq U \cap V \cap \bigcup_{i \in I} C_i = U \cap V \cap \bigcup_{i \in I_{x_0}} C_i,$$

in particolare $V \cap \bigcup_{i \in I_{x_0}} C_i \neq \emptyset$.

Essendo V un generico intorno di x_0 , per la caratterizzazione della chiusura

$$x_0 \in \overline{\bigcup_{i \in I_{x_0}} C_i} = \bigcup_{i \in I_{x_0}} \overline{C_i},$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che I_{x_0} è finito e quindi posso applicare il lemma precedente. Abbiamo quindi mostrato che

$$\overline{\bigcup_{i \in I} C_i} \subseteq \bigcup_{x_0 \in \overline{\bigcup_{i \in I} C_i}} \bigcup_{i \in I_{x_0}} \overline{C_i} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{C_i},$$

e quindi la tesi. \square

Corollario 2.177.

Un'unione localmente finita di chiusi è chiusa.

Teorema 2.178.

Un ricoprimento chiuso localmente finito è fondamentale.

Dimostrazione.

Sia $\{B_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento chiuso localmente finito e sia C un sottoinsieme di X tale che $C \cap B_i$ è chiuso in B_i per ogni $i \in I$. Essendo B_i chiuso in X , $C \cap B_i$ è chiuso in X . Inoltre, essendo $\{B_i\}_{i \in I}$ localmente finito, $\{C \cap B_i\}_{i \in I}$ è localmente finito. Allora per il lemma (2.176)

$$\bigcup_{i \in I} C \cap B_i = C \cap \bigcup_{i \in I} B_i = C \cap X = C$$

è chiuso in X . □

Corollario 2.179.

Un ricoprimento chiuso finito è fondamentale.

2.9 Spazi connessi

Studiamo ora una delle proprietà più visivamente accattivanti degli spazi topologici, cioè la connessione. In questa sezione studiamo le due principali definizioni di connessione (connessione e connessione per archi) e diamo una caratterizzazione delle componenti connesse di uno spazio topologico.

Definizione 2.180 (Connessione).

Uno spazio topologico è **connesso** se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. X non ammette partizione in aperti non banali, ovvero se $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ con A, B aperti allora $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.
2. X non ammette partizione in chiusi non banali.
3. Se $A \subseteq X$ è sia aperto che chiuso allora $A = \emptyset$ o $A = X$.

Uno spazio X è **sconnesso** se non è connesso, ovvero ammette partizione aperta/chiusa non banale.

Osservazione 2.181.

Chiaramente 1 e 2 sono equivalenti dato che A e B sono complementari. Inoltre 1 e 3 sono equivalenti in quanto se A è sia aperto che chiuso, $X \setminus A$ è sia chiuso che aperto.

Teorema 2.182.

L'intervallo $[0, 1]$ è connesso.

Dimostrazione.

L'idea sarà osservare che "il più grande sottoinsieme connesso che contiene un estremo" dovrebbe crescere se non fosse tutto l'intervallo.

Sia A un aperto e un chiuso non vuoto contenuto in $[0, 1]$. Se $A = [0, 1]$ abbiamo la tesi, stesso se $A = \emptyset$, quindi supponiamo A e $[0, 1] \setminus A$ entrambi non vuoti. A meno di scambiare A con $[0, 1] \setminus A$ supponiamo $0 \in A$. Sia allora $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid [0, t] \subseteq A\}$. Poiché $[0, 0] = \{0\} \subseteq A$ e $t_0 \leq 1$ dato che $A \subseteq [0, 1]$ abbiamo che t_0 è ben definito e appartiene a $[0, 1]$.

Osserviamo che t_0 è in realtà un massimo, ovvero che $[0, t_0] \subseteq A$:
 Per definizione di sup esiste t_n tale che $t_n \rightarrow t_0$ e $[0, t_n] \subseteq A$ per ogni n (da questa condizione osserviamo che $t_n \leq t_0$ per ogni n). Osserviamo che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, t_n] \subseteq A$$

da cui $[0, t_0] \subseteq A$, ma essendo A chiuso, $[0, t_0] = \overline{[0, t_0]} \subseteq A$ e quindi $t_0 \in A$.

Se per assurdo $t_0 \neq 1$, essendo A aperto, vediamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subseteq [t_0, t_0 + \varepsilon] \subseteq A$, ma allora $[0, t_0 + \varepsilon/2] \subseteq A$ e quindi t_0 non era il sup. \neq

Vediamo quindi che $t_0 = 1$ e quindi $[0, 1] \subseteq A \subseteq [0, 1]$ che contraddice l'ipotesi che A non sia $[0, 1]$ o \emptyset . \neq \square

Mostriamo tra poco che le funzioni continue mandano spazi connessi in spazi connessi. Siamo quindi giustificati dall'intuizione visiva a dare la seguente definizione:

Definizione 2.183 (Cammino).

Sia X uno spazio topologico. Un **cammino** in X è una funzione continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ³.

Definizione 2.184 (Giunzione).

Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ due cammini tali che $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Definiamo la loro **giunzione** come la mappa

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Di solito indichiamo la giunzione di γ_1 e γ_2 con $\gamma_1 * \gamma_2$.

Osservazione 2.185.

$\gamma_1 * \gamma_2$ è un cammino, infatti $\gamma_1(2 \cdot 1/2) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \gamma_2((2 \cdot 1/2) - 1)$, $\{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$ è un ricoprimento fondamentale di $[0, 1]$ e $\gamma_1(2t) : [0, 1/2] \rightarrow X$, $\gamma_2(2t - 1) : [1/2, 1] \rightarrow X$ sono continue in quanto composizioni di continue.

Osservazione 2.186.

Se non avessimo avuto i ricoprimenti fondamentali a disposizione, giustificare la continuità di $\gamma_1 * \gamma_2$ in $1/2$ sarebbe stato quasi impossibile con i limiti $t \rightarrow 1/2^+$, $t \rightarrow 1/2^-$ in quanto X potrebbe non essere T_2 (no unicità del limite (2.147)) o potrebbe non essere I-numerabile (continuità e continuità per successioni potrebbero non coincidere (2.99)).

Definizione 2.187 (Connessione per archi).

Uno spazio topologico X è **connesso per archi** se $\forall x_0, x_1 \in X$ esiste un cammino $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

Teorema 2.188 (Spazio connesso per archi è connesso).

Se X è connesso per archi allora X è connesso

³Alcuni definiscono un cammino come una continua $\gamma : I \rightarrow X$ dove I è un qualsiasi intervallo chiuso di \mathbb{R}

Dimostrazione.

Supponiamo che X sia sconnesso, ovvero $X = A \cup B$ con A, B aperti non vuoti disgiunti. Fissiamo $x_0 \in A$ e $x_1 \in B$. Se per assurdo $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ è un cammino che connette x_0 a x_1 avremmo che $[0, 1] = \gamma^{-1}(A \cup B) = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$ con $\gamma^{-1}(A) \cap \gamma^{-1}(B) = \gamma^{-1}(A \cap B) = \emptyset$, $\gamma^{-1}(A)$ e $\gamma^{-1}(B)$ aperti per la continuità di γ ed entrambi sarebbero non vuoti ($0 \in \gamma^{-1}(A)$ e $1 \in \gamma^{-1}(B)$). Allora $[0, 1]$ sarebbe sconnesso, che è assurdo. \neq \square

Osservazione 2.189.

La definizione di connessione per archi è subordinata al fatto che $[0, 1]$ è connesso e in questa dimostrazione lo abbiamo usato. Un ragionamento del tipo “[$0, 1$] è connesso perché è connesso per archi” sarebbe insensato.

Definizione 2.190 (Insieme convesso).

Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^n è **convesso** se $\forall p, q \in C$, il segmento che li congiunge è tutto contenuto in C , ovvero

$$\{tp + (1 - t)q \mid t \in [0, 1]\} \subseteq C \quad \forall p, q \in C.$$

L'espressione $tp + (1 - t)q$ con $t \in [0, 1]$ è detta una **combinazione convessa** di p e q .

Osservazione 2.191.

Uno spazio convesso è connesso per archi. Basta prendere come cammino il segmento che congiunge i punti.

Definizione 2.192 (Intervallo).

Gli **intervalli** sono i convessi di \mathbb{R} .

Teorema 2.193 (Connessi su \mathbb{R}).

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. C è connesso.
2. C è connesso per archi.
3. C è convesso.

Dimostrazione.

Le implicazioni $3 \implies 2 \implies 1$ valgono in generale, quindi basta verificare che $1 \implies 3$. Sia allora C un connesso che per assurdo non è convesso. Allora esistono $p, q \in C$ con $p < q$ tali che $[p, q] \not\subseteq C$, ovvero esiste $t_0 \in [p, q] \setminus C$. Osserviamo allora che

$$C = \underbrace{(C \cap (-\infty, t_0))}_{=A} \cup \underbrace{(C \cap (t_0, +\infty))}_{=B}.$$

Chiaramente A e B sono aperti disgiunti in C , dato che $(-\infty, t_0)$ e $(t_0, +\infty)$ sono aperti disgiunti in \mathbb{R} , inoltre $p \in A$ e $q \in B$. Allora C è sconnesso, che è un assurdo. \neq \square

Proposizione 2.194 (Se un denso è connesso, lo spazio è connesso).

Siano Z, Y sottospazi di X tali che $Z \subseteq Y \subseteq \overline{Z}$. Se Z è connesso allora anche Y è connesso.

Dimostrazione.

Sia $A \subseteq Y$ un sottoinsieme non vuoto aperto e chiuso in Y . Vogliamo mostrare che $A = Y$. Notiamo che Z è denso in Y , infatti $\overline{Z}^Y = \overline{Z} \cap Y = Y$ (lemma 2.107). Poiché un denso interseca ogni aperto non vuoto, segue che $Z \cap A \neq \emptyset$. Essendo A aperto e chiuso in Y , $Z \cap A$ è aperto e chiuso in Z e per quanto detto $Z \cap A \neq \emptyset$, quindi per la connessione di Z , $Z \cap A = Z$, ovvero $Z \subseteq A \subseteq Y$. Ma essendo A chiuso in Y , $Y = \overline{Z}^Y \subseteq A \subseteq Y$ e quindi $A = Y$ come voluto. \square

Corollario 2.195.

Se Z è connesso, \overline{Z} è connesso.

Proposizione 2.196 (Continue preservano connessione).

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Allora abbiamo che f manda connessi in connessi e connessi per archi in connessi per archi.

Dimostrazione.

★) Per assurdo sia $f(X) = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti non vuoti in $f(X)$. Allora

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

con $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ aperti perché controimmagine di aperti per continua, non vuoti perché $A, B \subseteq f(X)$ non vuoti e disgiunti perché controimmagini di disgiunti. Ricaviamo quindi che X è sconnesso, che è assurdo. \sharp

★) Siano $y_1, y_2 \in f(X)$. Esistono allora $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Essendo X connesso per archi esiste un cammino $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$. Consideriamo allora $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow Y$: essa è continua perché composizione di continue e $f \circ \gamma(0) = f(x_1) = y_1$, $f \circ \gamma(1) = f(x_2) = y_2$, quindi $f \circ \gamma$ è un cammino da y_1 a y_2 , dunque Y è connesso per archi. \square

Osservazione 2.197.

Uno spazio connesso non è necessariamente connesso per archi (2.392).

Teorema 2.198 (Prodotto finito di connessi è connesso).

Se X e Y sono connessi allora $X \times Y$ è connesso.

Dimostrazione.

Siano $A, B \subseteq X \times Y$ aperti non vuoti che coprono $X \times Y$. Vogliamo mostrare che $A \cap B \neq \emptyset$.

Osserviamo che $\pi_X(A) \cup \pi_X(B) = X$ dove $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ è la proiezione canonica. Osserviamo che $\pi_X(A)$ e $\pi_X(B)$ sono aperti non vuoti di X (proposizione 2.130), quindi per connessione $\pi_X(A) \cap \pi_X(B) \neq \emptyset$. Sia dunque $x_0 \in \pi_X(A) \cap \pi_X(B)$ e consideriamo $Y \cong \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ (proposizione 2.132). Siano $A' = (\{x_0\} \times Y) \cap A$ e $B' = (\{x_0\} \times Y) \cap B$, i quali sono aperti non vuoti tali che $A' \cup B' = \{x_0\} \times Y$. Per connessione di Y si ha che $A' \cap B' \neq \emptyset$, dunque

$$(\{x_0\} \times Y) \cap (A \cap B) \neq \emptyset \implies A \cap B \neq \emptyset.$$

\square

Teorema 2.199 (Prodotto finito di connessi per archi è connesso per archi).

Se X e Y sono connessi per archi allora $X \times Y$ è connesso per archi.

Dimostrazione.

Siano $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ elementi generici di $X \times Y$ e costruiamo un cammino da z_1 a z_2 .

Osserviamo che $\{x_1\} \times Y \cong Y$ è connesso per archi (abbiamo usato (2.132)), dunque esiste un cammino contenuto in $\{x_1\} \times Y \subseteq X \times Y$ che porta (x_1, y_1) in (x_1, y_2) . In modo del tutto analogo costruisco un cammino che porta (x_1, y_2) in (x_2, y_2) sfruttando la connessione per archi di $X \times \{y_2\} \cong X$. La giunzione di questi cammini è un cammino che porta z_1 a z_2 . \square

2.9.1 Componenti connesse

Proposizione 2.200 (Unione di connessi che si intersecano è connessa).

Dati Y_i connessi tali che $\emptyset \neq \bigcap Y_i$, si ha che $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ è connesso.

Dimostrazione.

Sia $A \subseteq Y$ un aperto, chiuso non vuoto. Se $A = Y$ allora abbiamo la tesi. Supponiamo dunque, a meno di scambiare A con $Y \setminus A$ che $x_0 \in A \cap (\bigcap Y_i)$. Osserviamo che $A \cap Y_i$ è aperto e chiuso in Y_i , inoltre è non vuoto perché $x_0 \in A \cap Y_i$, dunque per connessione di Y_i si ha $A \cap Y_i = Y_i$.

Possiamo dunque concludere che

$$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i = \bigcup_{i \in I} A \cap Y_i = A \cap Y = A.$$

\square

Definizione 2.201 (Componente connessa).

Sia $x_0 \in X$, definiamo la **componente connessa** di x_0 ($C(x_0)$) come il più grande sottoinsieme connesso di X che contiene x_0 , cioè

$$C(x_0) = \bigcup_{x_0 \in C, C \text{ conn.}} C.$$

La buona definizione segue dal fatto che $\{x_0\}$ è connesso e dalla proposizione precedente.

Proposizione 2.202.

Ogni componente connessa è chiusa

Dimostrazione.

Sappiamo che la chiusura di un connesso è connessa, dunque $\overline{C(x_0)}$ è connesso e contiene x_0 , da cui $\overline{C(x_0)} \subseteq C(x_0)$. \square

Proposizione 2.203.

Le componenti connesse danno una partizione di X .

Dimostrazione.

Dato che per ogni $x_0 \in X$ si ha $x_0 \in C(x_0)$, le componenti connesse sono non vuote e coprono X . Supponiamo dunque che $C(x_0) \cap C(x_1) \neq \emptyset$, allora per la proposizione $C(x_0) \cup C(x_1)$ è un connesso e contiene x_0 e x_1 , cioè $C(x_0) \cup C(x_1) \subseteq C(x_0) \cap C(x_1)$, da cui $C(x_0) = C(x_1)$. \square

Corollario 2.204.

Se X ha un numero finito di componenti connesse allora ognuna di queste è sia aperta che chiusa.

Dimostrazione.

Se C_1, \dots, C_n sono le componenti connesse di X sappiamo che $X = C_1 \cup (C_2 \cup \dots \cup C_n)$. Il secondo termine è una unione finita di chiusi, dunque è chiusa, allora il suo complementare (C_1) è aperto. \square

Osservazione 2.205.

In generale le componenti connesse non sono aperte. (2.394)

Definizione 2.206 (Componenti connesse per archi).

Consideriamo la seguente relazione di equivalenza su X :

$$x_0 \sim x_1 \iff \text{esiste un cammino da } x_0 \text{ a } x_1.$$

La **componente connessa per archi** di x_0 (che denotiamo $A(x_0)$) è la classe di equivalenza di x_0 rispetto alla relazione.

Proposizione 2.207 (Caratterizzazione delle componenti connesse per archi).

$A(x_0)$ è il più grande connesso per archi che contiene x_0 .

Dimostrazione.

$A(x_0)$ è chiaramente connesso per archi. Se B è un connesso per archi che contiene x_0 allora $\forall x_1 \in B$ abbiamo un cammino che lo unisce a x_0 , dunque $x_1 \sim x_0$, ovvero $x_1 \in A(x_0)$. \square

Osservazione 2.208.

Le componenti connesse per archi in generale non sono né aperte né chiuse. (2.395)

Osservazione 2.209.

Poiché connesso per archi implica connesso, si ha che $A(x_0) \subseteq C(x_0)$.

Definizione 2.210 (Zero-esimo gruppo di omotopia).

Dato X spazio topologico definiamo lo **0-esimo gruppo di omotopia** come

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\}.$$

Osservazione 2.211.

Se $f : X \rightarrow Y$ è continua, f induce una funzione di insiemi tra $\pi_0(X)$ e $\pi_0(Y)$ (se x e y sono connessi da un cammino γ , $f(x)$ e $f(y)$ sono connessi dal cammino $f \circ \gamma$).

Osservazione 2.212.

$\pi_0(id_X) = id_{\pi_0(X)}$ e le mappe indotte preservano la composizione di funzioni continue.

Possiamo riassumere quanto detto in

Fatto 2.213.

π_0 è un funtore covariante da Top a Set

Osservazione 2.214.

Se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo allora $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ è una mappa biunivoca.

Locale connessione per archi

Definizione 2.215.

X è **localmente connesso (connesso per archi)** se ogni punto di X ha un sistema fondamentale di intorni connessi (connessi per archi).

Osservazione 2.216.

Esistono spazi connessi per archi che non sono localmente connessi per archi (2.393).

Proposizione 2.217 (Componenti connesse per archi in localmente connesso per archi sono aperte e chiuse).

Se X è localmente connesso per archi allora le componenti connesse per archi sono sia aperte che chiuse.

Dimostrazione.

Mostriamo che per ogni $x_0 \in X$, $A(x_0)$ è sia aperto che chiuso.

aperto) Dato $x_1 \in A(x_0)$, per locale connessione per archi sappiamo che esiste un intorno U di x_1 connesso per archi, cioè $U \subseteq A(x_1) = A(x_0)$, dunque $A(x_0)$ è intorno di ogni suo punto, cioè è aperto.

chiuso)

$$A(x_0) = X \setminus \underbrace{\bigcup_{x \notin A(x_0)} A(x)}_{\text{aperto}}$$

□

Teorema 2.218 (Connesso localmente connesso per archi è connesso per archi).

Se X è connesso e localmente connesso per archi allora è connesso per archi.

Dimostrazione.

Sia $x_0 \in X$. Dato che $x_0 \in A(x_0)$, $A(x_0) \neq \emptyset$. Dato che X è localmente connesso per archi si ha che $A(x_0)$ è sia aperto che chiuso. Mettendo tutto insieme, $A(x_0)$ è un insieme non vuoto, aperto e chiuso in X , che è connesso, dunque $A(x_0) = X$, cioè X è connesso per archi. □

Proposizione 2.219 (Aperto in localmente connesso per archi è localmente connesso per archi).

Se X è localmente connesso per archi allora ogni suo aperto è localmente connesso per archi.

Dimostrazione.

Se $A \subseteq X$ è aperto, sia $U = \{U_i\}$ un sistema fondamentale di intorni connessi per archi di $x_0 \in A$. Osserviamo che

$$U' = \{U_i \in U \mid U_i \subseteq A\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di x_0 connessi per archi in A . Infatti se $V \subseteq A$ è un intorno di x_0 in A allora è un intorno di x_0 in X . Esiste dunque $U_i \in U$ tale che $U_i \subseteq V \subseteq A$, ovvero $U_i \in U'$ e quindi esiste un intorno in U' contenuto in V . □

Corollario 2.220 (Aperto connesso in localmente connesso per archi è connesso per archi).

Se X è localmente connesso per archi e $A \subseteq X$ è un aperto connesso allora A è connesso per archi.

Dimostrazione.

Per la proposizione, A è un connesso localmente connesso per archi, quindi essendo connesso è localmente connesso per archi (2.218). \square

Proposizione 2.221 (Componenti connesse per archi di aperto in localmente connesso per archi sono aperte).

Le componenti connesse per archi di un aperto in uno spazio localmente connesso per archi sono aperte.

Dimostrazione.

Se X è localmente connesso per archi e A è un suo aperto, per la proposizione (2.219) si ha che A è localmente connesso per archi, dunque se C è una componente connessa per archi di A si ha che essa è aperta e chiusa in A (2.217). In particolare C è un aperto in un aperto di X , quindi è aperto in X . \square

Osservazione 2.222.

Se X è localmente connesso per archi e $A \subseteq X$ è un aperto allora A è connesso se e solo se è connesso per archi.

Osservazione 2.223.

Se X e Y sono omeomorfi allora hanno lo stesso numero di componenti connesse/connesse per archi.

2.10 Compattezza

Introduciamo ora una delle proprietà più importanti che uno spazio topologico possa avere: la compattezza. I compatti su \mathbb{R}^n sono semplicemente insiemi chiusi e limitati, che ci permettono di trovare massimi, trovare chiusi tramite funzioni continue eccetera, ma in generale la bellezza dei compatti è la loro proprietà di restituire ricoprimenti aperti (e quindi fondamentali (2.168)) finiti. In questa sezione esploreremo diverse proprietà dei compatti, studianone prima i comportamenti generali per poi spostarci su spazi metrici ed \mathbb{R}^n .

Definizione 2.224 (Spazio compatto).

Uno spazio topologico X si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

Teorema 2.225 (Alexander debole).

Se \mathcal{B} è una base della topologia di Z e da ogni ricoprimento di Z costituito da aperti di base è possibile estrarre un sottoricoprimento finito allora Z è compatto.

Dimostrazione.

Sia $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di Z . Per definizione di base $U_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$ con $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$, dunque $\Omega = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ è un ricoprimento di Z costituito da aperti di base, esistono dunque $B_1, \dots, B_k \in \Omega$ aperti di base che coprono Z . Osserviamo che $B_i \subseteq U_{j_i}$ per qualche j_i per costruzione di Ω , dunque $\{U_{j_1}, \dots, U_{j_k}\}$ è un sottoricoprimento finito di U . \square

Teorema 2.226 (Alexander).

Se X è uno spazio topologico e \mathcal{D} è una sua prebase si ha che se da ogni ricoprimento di aperti in \mathcal{D} si può estrarre un sottoricoprimento finito allora X è compatto.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che X non sia compatto. Vogliamo applicare il lemma di Zorn all'insieme dei ricoprimenti aperti di X che non ammettono sottoricoprimento finito. Trovato U massimale per questo insieme considereremo poi $W = U \cap \mathcal{D}$ e sfrutteremo le proprietà della prebase e la massimalità di U per costruire un sottoricoprimento finito di U .

L'insieme dei ricoprimenti aperti di X che non ammettono sottoricoprimenti finiti non è vuoto per ipotesi (X non è compatto), inoltre se $\Omega = \{U_i, i \in I\}$ è una catena in questo insieme osservo che $U = \bigcup U_i$ è un ricoprimento, non ammette sottoricoprimento finito (altrimenti esisterebbe definitivamente U_i nella catena che ammette sottoricoprimento finito) ed è effettivamente un maggiorante per Ω . Per il *lemma di Zorn* esiste allora U ricoprimento di X massimale tra i ricoprimenti che non ammettono sottoricoprimento finito, cioè se B è un aperto non incluso in U allora $U \cup \{B\}$ ammette sottoricoprimento finito.

Sia $W = U \cap \mathcal{D}$ una famiglia di aperti di prebase di X . Se W fosse un ricoprimento allora per ipotesi potremmo estrarre un sottoricoprimento finito, ma questo sarebbe un sottoricoprimento finito di U che non esiste.

Sia dunque $x_0 \in X \setminus \bigcup_{A \in W} A$. Per definizione di ricoprimento esiste $V \in U$ tale che $x_0 \in V$ e per definizione di prebase esistono $D_1, \dots, D_k \in \mathcal{D}$ tali che $x_0 \in D_1 \cap \dots \cap D_k \subseteq V$ (l'intersezione è un generico aperto di base).

Osserviamo che $D_i \notin U$ dato che altrimenti $x_0 \in \bigcup_{A \in W} A$, dunque per massimalità di U esistono C_i sottoricoprimenti finiti di $U \cup \{D_i\}$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$.

Affermiamo che

$$R = \{V\} \cup \bigcup_{i=1}^k C_i \setminus \{D_i\}$$

è un sottoricoprimento finito di U , che ci porterà all'assurdo cercato.

Per costruzione $C_i \setminus \{D_i\} \subseteq U$, quindi $R \subseteq U$ ed è chiaramente finito, basta solo mostrare che copre. Dato che tutti i C_i sono ricoprimenti, se $P \in X$ è tale che $P \notin \bigcup_{i=1}^k C_i \setminus \{D_i\}$ allora $P \in D_1 \cap \dots \cap D_k \subseteq V$. \square

Osservazione 2.227.

Se X è finito allora è compatto dato che ammette un numero finito di aperti.

Osservazione 2.228.

Insiemi non compatti esistono (2.396).

Teorema 2.229 (Continue mandano compatti in compatti).

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Se X è compatto allora $f(X)$ è compatto.

Dimostrazione.

Consideriamo un ricoprimento aperto di $f(X)$. Prendendo le controimmagini degli aperti tramite f troviamo un ricoprimento aperto di X . Per compattezza ne estraiamo uno finito. Allora gli aperti del ricoprimento originale con gli stessi indici del ricoprimento finito sono un ricoprimento finito di $f(X)$. \square

Corollario 2.230.

Se X e Y sono omeomorfi allora X è compatto se e solo se Y è compatto.

Definizione 2.231 (Proprietà dell'intersezione finita).

Una famiglia di sottoinsiemi $\{Y_i\}_{i \in I}$ di un insieme X ha la **proprietà dell'intersezione finita** se per ogni $J \subseteq I$ finito si ha $\bigcap_{i \in J} Y_i \neq \emptyset$.

Osservazione 2.232.

Esistono famiglie di sottoinsiemi che godono della proprietà dell'intersezione finita (2.397)

Proposizione 2.233 (Formulazione di compattezza con i chiusi).

Sia X uno spazio topologico. Si ha che X è compatto se e solo se per ogni famiglia $\{C_i\}_{i \in I}$ di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita si ha che $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

Dimostrazione.

Siamo passati al complementare logico della definizione di compattezza.

Se $\{C_i\}$ è una famiglia di chiusi allora $\{X \setminus C_i\}$ è una famiglia di aperti. Osserviamo che $\bigcap_{i \in J} C_i \neq \emptyset$ è equivalente a $\bigcup_{i \in J} X \setminus C_i \neq X$. La proprietà dell'intersezione finita si traduce in “non è possibile coprire X con un sottoinsieme finito di $\{X \setminus C_i\}$ ”, dunque la proprietà indicata nel testo si traduce in “se da una collezione di aperti non è possibile estrarre un ricoprimento finito allora la collezione non è un ricoprimento di X ” che è logicamente equivalente alla definizione di compattezza. \square

Corollario 2.234.

Se X è compatto e C_n è una successione di chiusi non vuoti tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Osservazione 2.235.

Sia la compattezza dello spazio che la chiusura dei termini sono condizioni necessarie (2.397).

2.10.1 Sottoinsiemi compatti

Osservazione 2.236.

$Y \subseteq X$ è compatto se e solo se per ogni $\{U_i\}_{i \in I}$ famiglia di aperti di X tale che $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ esiste $J \subseteq I$ finito tale che $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$.

Teorema 2.237 (Un chiuso di un compatto è compatto).

Se X è compatto e $C \subseteq X$ è chiuso allora C è compatto.

Dimostrazione.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X che copre C . Se a questa famiglia aggiungo $V = X \setminus C$ troviamo un ricoprimento di X , dunque per compattezza estraiamo un sottoricoprimento finito di X con indici $J \subseteq I$ più eventualmente V . Se V non appartiene a questo nuovo ricoprimento allora questo è un sottoinsieme di $\{U_i\}_{i \in I}$ e abbiamo la tesi osservando che $C \subseteq X$. Se V appartiene al ricoprimento, vediamo comunque $C \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ perché $V = X \setminus C$. \square

Osservazione 2.238.

Sottoinsiemi compatti di uno spazio topologico non sono necessariamente chiusi (2.398), ma con il prossimo teorema vediamo che aggiungendo l'ipotesi *Hausdorff* all'ipotesi di compattezza allora sottoinsiemi chiusi e sottoinsiemi compatti coincidono.

Teorema 2.239 (Compatti in Hausdorff sono chiusi).

Se X è T_2 e $Y \subseteq X$ è compatto allora Y è chiuso.

Dimostrazione.

Mostriamo che $X \setminus Y$ è intorno di ogni suo punto. Sia $P \in X \setminus Y$. Essendo X Hausdorff si ha che per ogni $y \in Y$ esistono aperti U_y e W_y tali che $P \in U_y$, $y \in W_y$ e $U_y \cap W_y = \emptyset$. Chiaramente

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} U_y,$$

dunque per la compattezza di Y esistono $y_1, \dots, y_n \in Y$ tali che $Y \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$. Sia $W = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$. Chiaramente W è un aperto che contiene P e

$$W \cap Y \subseteq W \cap (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}) = \emptyset.$$

Abbiamo quindi mostrato che per ogni $P \in X \setminus Y$ esiste $W \subseteq X \setminus Y$ aperto tale che $P \in W$, cioè $X \setminus Y$ è intorno di P . \square

I compatti Hausdorff sono spazi molto interessanti, per esempio:

Proposizione 2.240 (Compatto Hausdorff è regolare).

Se X è compatto e T_2 allora è regolare.

Dimostrazione.

Dato che X è T_2 è anche T_1 , quindi basta mostrare che è T_3 .

Se $Y \subseteq X$ è chiuso allora è compatto. Tramite la costruzione fatta nel teorema precedente, se $P \in X \setminus Y$ possiamo trovare $Y \subseteq U$ con U aperto in X , W aperto che contiene P e $U \cap W = \emptyset$. \square

In realtà vale la condizione più forte

Teorema 2.241 (Compatto Hausdorff è normale).

Se X è compatto e T_2 allora X è normale.

Dimostrazione.

Dato che X è T_2 è automaticamente T_1 , basta dunque mostrare che è T_4 . Siano Y_1, Y_2 due chiusi disgiunti di X . Poiché X è regolare si ha che per ogni $y \in Y_1$ esistono U_y, W_y aperti tali che $y \in U_y$, $Y_2 \subseteq W_y$ e $U_y \cap W_y = \emptyset$.

Osserviamo che Y_1 è coperto dai U_y , dunque per compattezza $\exists y_1, \dots, y_n \in Y_1$ tali che $Y_1 \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} = U$.

Definiamo allora $W = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$. W è un aperto tale che $Y_2 \subseteq W$, U è un aperto tale che $Y_1 \subseteq U$ e $U \cap W = \emptyset$ per costruzione. \square

Osservazione 2.242.

Per spazi compatti vale

$$\text{Normale} \iff \text{Regolare} \iff \text{Hausdorff},$$

mentre ricordiamo che per spazi generali le frecce vanno verso destra e sono implicazioni strette.

L'assioma T_2 gioca bene anche con le mappe a dominio in un compatto. I seguenti risultati finiscono per essere tra i modi più comuni per costruire omeomorfismi a partire da spazi compatti:

Teorema 2.243 (Continue da compatto a T_2 sono chiuse).

Se X è compatto, Y è T_2 e $f : X \rightarrow Y$ è continua allora f è chiusa.

Dimostrazione.

Sia $C \subseteq X$ chiuso. Verifichiamo che $f(C)$ è chiuso. Dato che X è compatto, essendo C chiuso esso è anche compatto. Le funzioni continue mandano compatti in compatti, dunque $f(C)$ è compatto in Y , il quale è T_2 , quindi $f(C)$ è chiuso. \square

Corollario 2.244.

Se X è compatto, Y è T_2 e $f : X \rightarrow Y$ è continua e bigettiva allora f è un omeomorfismo.

Definizione 2.245 (Funzione propria).

Una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ è **propria** se per ogni $K \subseteq Y$ compatto $f^{-1}(K)$ è compatto.

Proposizione 2.246 (Proprie a immagine in loc.cpt T_2 sono chiuse).

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua propria e supponiamo che Y sia localmente compatto e Hausdorff. Allora f è una mappa chiusa.

Dimostrazione.

Sia $C \subseteq X$ chiuso. Mostriamo che $Y \setminus f(C)$ è intorno di ogni suo punto. Siano dunque $y \in Y \setminus f(C)$ e V un suo intorno compatto. Poiché f è propria $f^{-1}(V)$ è compatto, dunque $C \cap f^{-1}(V)$ è compatto perché chiuso in compatto. Segue dunque che $f(C \cap f^{-1}(V)) = H$ è un compatto di Y contenuto in $f(C)$. Definiamo $U = \text{int}(V) \setminus H$, il quale è un intorno di y perché intersezione di aperti che lo contengono (H è chiuso perché compatto in T_2 e non contiene y perché è contenuto in $f(C)$). Concludiamo osservando che

$$U \cap f(C) \subseteq f(C) \cap V \cap (Y \setminus f(C \cap f^{-1}(V))) \subseteq (f(C) \cap V) \cap Y \setminus (f(C) \cap V) = \emptyset.$$

\square

2.10.2 Compattezza per prodotti

Teorema 2.247 (Tychonoff debole).

X e Y sono compatti se e solo se $X \times Y$ è compatto.

Dimostrazione.

Le proiezioni sono continue quindi $X \times Y$ compatto implica subito X e Y compatti.

Mostriamo dunque che X, Y compatti implica $X \times Y$ compatto. Per la versione debole del Teorema di Alexander (2.226) basta mostrare che ogni ricoprimento di aperti di base di $X \times Y$ ammette sottoricoprimento finito. Sia $U = \{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ un tale ricoprimento, cioè U_i aperto in X e V_i aperto in Y per ogni $i \in I$.

Ricordiamo che per ogni $x_0 \in X$, $\{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ è omeomorfo a Y (2.132), in particolare è compatto. Sia dunque $I_{x_0} \subseteq I$ finito tale che

$$\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I_{x_0}} (U_i \times V_i).$$

A meno di eliminare termini ridondanti supponiamo $x_0 \in U_i$ per ogni $i \in I_{x_0}$. Osserviamo che l'insieme $U_{x_0} = \bigcap_{i \in I_{x_0}} U_i$ è aperto in quanto intersezione finita di aperti e contiene x_0 .

Ripetendo questa procedura per ogni $x \in X$ troviamo un ricoprimento aperto $\{U_x\}_{x \in X}$ di X , quindi per compattezza esistono x_1, \dots, x_n tali che $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, dunque

$$X \times Y \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) \times Y = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j \in I_{x_i}} U_j \times V_j$$

che è una unione finita di aperti di base presenti nel ricoprimento originale, abbiamo cioè trovato un sottoricoprimento finito di aperti di base. \square

Teorema 2.248 (Tychonoff).

Sia $I \neq \emptyset$ e sia X_i uno spazio topologico per ogni $i \in I$, allora $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto se e solo se X_i è compatto per ogni $i \in I$.

Dimostrazione.

\implies) Ovvio perché le proiezioni sui fattori sono continue.

\impliedby) Verifichiamo la tesi sulla prebase standard per invocare il teorema di Alexander (2.226).

Sia U un ricoprimento di aperti di prebase, cioè della forma

$$U = \bigcup_{i \in I} \{\pi_i^{-1}(A), A \in \Omega_i\}$$

dove Ω_i è una famiglia di aperti di X_i . Osserviamo che esiste $i_0 \in I$ tale che Ω_{i_0} copre X_{i_0} , infatti se così non fosse potresti trovare $\tilde{x}_i \in X_i \setminus \bigcup_{A \in \Omega_i} A$ per ogni i , ma allora

$$(\tilde{x}_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \setminus \bigcup_{A \in U} A$$

che è assurdo in quanto U ricoprimento.

Per compattezza di X_{i_0} allora posso estrarre un sottoricoprimento finito da Ω_{i_0} che chiamo $\hat{\Omega}_{i_0}$. Osserviamo che

$$\{\pi_{i_0}^{-1}(A), A \in \hat{\Omega}_{i_0}\}$$

è un ricoprimento del prodotto e chiaramente è un sottoricoprimento finito di U . \square

Corollario 2.249.

Per ogni insieme X , lo spazio $\{f : X \rightarrow [0, 1]\} = [0, 1]^X$ è compatto con la topologia della convergenza puntuale.

Teorema 2.250 (Wallace).

Siano X e Y spazi topologici e siano $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi compatti. Se $N \subseteq X \times Y$ è un aperto tale che $A \times B \subseteq N$ allora esistono $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ aperti tali che

$$A \times B \subseteq U \times V \subseteq N.$$

Dimostrazione.

Per definizione di topologia prodotto, per ogni $(a, b) \in A \times B$ siano $U_{a,b} \subseteq X$ e $V_{a,b} \subseteq Y$ aperti tali che $(a, b) \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subseteq N$. Fissato $a \in A$ osserviamo che $\{V_{a,b} \mid b \in B\}$ è un ricoprimento aperto di B , quindi per compattezza esiste $J_a \subseteq B$ finito tale che $V_a = \bigcup_{b \in J_a} V_{a,b}$ contiene B . Per ogni a sia $U_a = \bigcap_{b \in J_a} U_{a,b}$. Per costruzione $\{a\} \times B \subseteq U_a \times V_a \subseteq N$.

Osserviamo ora che $\{U_a \mid a \in A\}$ è un ricoprimento aperto di A , quindi esiste $J \subseteq A$ finito tale che $U = \bigcup_{a \in J} U_a$ contiene A . Poniamo $V = \bigcap_{a \in J} V_a$. Gli U e V costruiti verificano la tesi. \square

2.10.3 Compattificazione di Alexandroff

Visto quante proprietà hanno gli spazi compatti, ci domandiamo se esiste un modo per trasformare uno spazio dato in uno spazio compatto senza cambiarlo troppo. Questo tipo di metodo si chiama “compattificazione” e in questa sezione studiamo in particolare il metodo di Alexandroff, il quale restituisce uno spazio compatto aggiungendo un solo punto.

Definizione 2.251 (Compattificazione).

Dato uno spazio topologico X , una **compattificazione** di X è data da uno spazio \hat{X} e una mappa continua $i : X \rightarrow \hat{X}$ tale che:

1. $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ è una immersione topologica
2. $i(X)$ è denso in \hat{X}
3. \hat{X} è compatto.

Se $|\hat{X} \setminus i(X)| = 1$ si dice \hat{X} è una **compattificazione ad un punto** di X .

Osservazione 2.252.

Intuitivamente, la definizione dice che \hat{X} è una compactificazione di X se ha un sottospazio omeomorfo a X , questo sottospazio è quasi tutto \hat{X} e \hat{X} stesso è compatto.

Definiamo un procedimento per trovare una compactificazione ad un punto:

Definizione 2.253 (Compattificazione di Alexandroff).

Dato uno spazio topologico X consideriamo $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, dove ∞ è un generico elemento non contenuto in X . L'insieme \hat{X} dotato della seguente topologia è detto la **compattificazione di Alexandroff** di X :

$A \subseteq \hat{X}$ è aperto se

- $\infty \notin A$ e A aperto in X , oppure
- $\infty \in A$ e $X \setminus A$ è chiuso *compatto* di X .

Teorema 2.254 (La compattificazione di Alexandroff è una compattificazione).
La compattificazione di Alexandroff di uno spazio non compatto è una compattificazione ad un punto.

Dimostrazione.

Per semplicità diremo “aperto di Alexandroff” al posto di “aperto in \hat{X} secondo la definizione della compattificazione di Alexandroff”.

\hat{X} è uno spazio topologico)

- Osservo che $\infty \notin \emptyset$ e \emptyset è aperto in X . $\hat{X} \setminus \hat{X} = \emptyset$ e questo è un chiuso compatto di X .
- Se A_1, A_2 sono aperti di \hat{X} allora per $A_1 \cap A_2$ si presentano tre casi:
 1. Se A_1 e A_2 sono inclusi in X allora sono aperti di X e $A_1 \cap A_2$ è un aperto di X , dunque $A_1 \cap A_2$ è aperto di Alexandroff.
 2. Se $A_1 \subseteq X$ e $\infty \in A_2$ allora $A_2 = \{\infty\} \cup A'$ con A' aperto di X ($A' = X \setminus (\hat{X} \setminus A_2)$), dunque $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A'$ e per il caso precedente vale quanto voluto.
 3. Se $\infty \in A_1 \cap A_2$ osserviamo che $\hat{X} \setminus (A_1 \cap A_2) = (\hat{X} \setminus A_1) \cup (\hat{X} \setminus A_2)$ è unione di due chiusi compatti in X , che è un chiuso compatto di X .
- Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di Alexandroff.
 Se ogni A_i è contenuto in X la loro unione è ancora contenuta in X ed è un aperto di X .
 Se esiste $i_0 \in I$ tale che $\infty \in A_{i_0}$ allora consideriamo

$$\hat{X} \setminus \bigcup A_i = \bigcap \hat{X} \setminus A_i.$$

Questa è intersezione di chiusi di X e quindi è chiusa (se $\infty \in \hat{X} \setminus A_i$ sappiamo che $\infty \notin \hat{X} \setminus A_{i_0}$ quindi possiamo sostituire $\hat{X} \setminus A_i$ con $X \setminus A_i$ che è un chiuso di X).

Inoltre $\hat{X} \setminus A_{i_0}$ è compatto e chiuso per definizione degli aperti di Alexandroff, quindi l'intersezione è un insieme chiuso contenuto in compatto chiuso, cioè è un sottospazio chiuso di quel compatto, dunque è compatto.

$|\hat{X} \setminus X| = 1$) Per costruzione.

i è una immersione topologica) Per la definizione degli aperti di Alexandroff è evidente che i è una mappa aperta. Basta dunque verificare che i è continua: dato che $A \subseteq \hat{X}$ si ha che $i^{-1}(A) \subseteq X$ o è A stesso (se $\infty \notin A$) e quindi per definizione era già aperto, oppure è $A \setminus \{\infty\}$, ma sappiamo che $\hat{X} \setminus A = X \setminus (A \setminus \{\infty\})$ è chiuso di X , cioè $A \setminus \{\infty\}$ è aperto di X .

\hat{X} è compatto) Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di \hat{X} . Sia dunque $i_0 \in I$ tale che $\infty \in A_{i_0}$ e consideriamo $K = \hat{X} \setminus A_{i_0}$, il quale per ipotesi è compatto e chiuso in X . Per la continuità dell'inclusione K è compatto in \hat{X} quindi esistono $A_1, \dots, A_k \in \{A_i\}_{i \in I}$ che lo coprono, ma allora $\{A_1, \dots, A_k, A_{i_0}\}$ è ricoprimento finito di \hat{X} .

X denso in \hat{X}) Se X non è compatto e non fosse denso allora necessariamente $\overline{X} = X$, ma allora X sarebbe un chiuso in un compatto, cioè sarebbe compatto. \square

Osservazione 2.255.

Se X è uno spazio compatto e provassimo a costruirne la compattificazione di Alexandroff vedremmo che continua a valere tutto eccetto la condizione “ X denso in \hat{X} ”, infatti in tal caso $\{\infty\}$ sarebbe un valido aperto di \hat{X} e quindi $\infty \notin \bar{X}$ per la caratterizzazione (2.56).

Teorema 2.256 (Unicità della compattificazione di Alexandroff).

Se Y è uno spazio compatto T_2 e $P \in Y$ è tale che $Y \setminus \{P\}$ non è compatto allora Y è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di $Y \setminus \{P\}$.

Dimostrazione.

Siano $X = Y \setminus \{P\}$ e \hat{X} la sua compattificazione di Alexandroff. Consideriamo $f : \hat{X} \rightarrow Y$ data da $f(y) = y$ per $y \neq \infty$ e $f(\infty) = P$. Basta mostrare che f è un omeomorfismo. Chiaramente f è una funzione bigettiva, quindi, dato che \hat{X} è compatto e Y è T_2 basta mostrare che f è continua (2.243).

Sia A un aperto di Y . Se $P \notin A$ allora $f^{-1}(A) = A$ che è ancora aperto. Se $P \in A$ allora $f^{-1}(A) = (A \setminus \{P\}) \cup \{\infty\}$. Osserviamo che

$$\hat{X} \setminus ((A \setminus \{P\}) \cup \{\infty\}) = (Y \setminus \{P\}) \cup \{\infty\} \setminus ((A \setminus \{P\}) \cup \{\infty\}) = Y \setminus A$$

che è chiuso in Y . Dato che Y è compatto e $Y \setminus A$ è un chiuso contenuto in Y , $Y \setminus A$ è compatto. Abbiamo dunque verificato che $f^{-1}(A)$ è un aperto di Alexandroff. \square

Proiezione stereografica

Sappiamo che \mathbb{R}^n non è compatto (2.396), possiamo quindi provare a studiarne la compattificazione di Alexandroff. Sarà il caso che una particolare mappa, detta “proiezione stereografica” ci permetterà di vedere che la compattificazione è S^n .

Definizione 2.257 (Proiezione stereografica).

Data una dimensione n , la **proiezione stereografica** è la mappa $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ che associa ad ogni punto P della sfera (escluso appunto N in polo nord) il punto di intersezione tra la retta passante per N e P con l’iperpiano $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ identificato con \mathbb{R}^n .

Esplicitamente si ha che se $P = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x, x_{n+1})$ allora il punto corrisponde alla soluzione di

$$t(x, x_{n+1}) + (1-t)(0, 1) = (\pi(P), 0) \implies t = \frac{1}{(1-x_{n+1})}$$

cioè

$$\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right).$$

Osservazione 2.258.

La proiezione stereografica è continua.

Teorema 2.259.

La proiezione stereografica è un omeomorfismo tra $S^n \setminus \{N\}$ e \mathbb{R}^n .

Dimostrazione.

Basta trovare una inversa continua. Per definire la mappa invertiamo la procedura che definisce la proiezione stereografica. Basterà a quel punto verificare la continuità.

Sia $(x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Cerchiamo la soluzione di

$$1 = (1-t)^2 x_1^2 + \cdots + (1-t)^2 x_n^2 + t^2$$

$$t^2(1+|x|^2) - 2|x|^2 t + |x|^2 - 1 = 0$$

diversa da $t = 1$, quindi facendo una semplice divisione polinomiale

$$t = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1},$$

da cui

$$\pi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{2}{|x|^2 + 1} x_1, \dots, \frac{2}{|x|^2 + 1} x_n, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right),$$

che è continua in quanto continua su ogni componente. \square

Corollario 2.260.

Per ogni $P \in S^n$, $S^n \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione.

Segue da quanto detto osservando che le rotazioni sono omeomorfismi della sfera in se stessa. \square

Osservazione 2.261.

Sappiamo che \mathbb{R}^n non è compatto, ma S^n è compatto e per quanto appena detto aggiungere un punto ci porta da \mathbb{R}^n a S^n , quindi S^n è la compattificazione di Alexandroff di \mathbb{R}^n (teorema 2.256) dove l'immersione topologica può essere data dall'inversa della proiezione stereografica.

Osservazione 2.262 (Sfera di Riemann).

Osserviamo che topologicamente \mathbb{C} è una copia di \mathbb{R}^2 , quindi facendo questo stesso ragionamento su \mathbb{R}^2 e vedendolo come \mathbb{C} troviamo una compattificazione dei complessi. Questa è la famosa **sfera di Riemann**.

2.10.4 Compattezza in spazi metrici

Date le belle proprietà dei compatti e le belle proprietà degli spazi metrici, unire i due concetti non può che restituire una ricca teoria (per esempio vedremo che in spazi metrici compattezza, compattezza per successione e totale limitatezza unita a completezza sono concetti equivalenti (2.285)). L'approfondimento di questo tema è dominio dell'analisi ma in questa sede riportiamo i principali risultati e un breve studio sugli spazi completi e \mathbb{R}^n .

Compattezza e assiomi di numerabilità

Sappiamo che gli spazi metrici sono I-numerabili (2.80) e gli spazi metrici separabili sono II-numerabili (2.85). Studiamo dunque come si comportano le nozioni di compattezza con gli assiomi di numerabilità e le successioni.

Definizione 2.263 (Compattezza sequenziale).

Uno spazio topologico X è **sequenzialmente compatto** o **compatto per successioni** se ogni successione a valori in X ammette una sottosuccessione convergente.

Osservazione 2.264.

In generale compattezza e compattezza per successioni sono nozioni completamente distinte (esempi (2.399) e (2.400)).

Definizione 2.265 (Spazio Lindelöf).

Uno spazio X si dice di **Lindelöf** se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento al più numerabile.

Osservazione 2.266.

Essere Lindelöf è una condizione simile e più debole della compattezza.

Proposizione 2.267 (I-numerabile compatto è sequenzialmente compatto).

Se X è I-numerabile ed è compatto allora è sequenzialmente compatto.

Dimostrazione.

Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione: vogliamo estrarre una sottosuccessione convergente.

L'idea è considerare i punti aderenti a tutte le code della successione e intersecarli. I punti della successione spariscono quindi rimangono punti di accumulazione, a quel punto basta sceglierne uno e costruire una successione che vi tenda prendendo un termine per ogni intorno di un SFI numerabile del candidato limite.

Per $m \in \mathbb{N}$, poniamo $C_m = \overline{\{x_n \mid n \geq m\}} \subseteq X$. Per definizione i C_m sono chiusi, inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha che $C_{m+1} \subseteq C_m$ e $C_m \neq \emptyset$. Per compattezza di X , concludiamo che $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m \neq \emptyset$ (corollario 2.234). Fissiamo allora $\tilde{x} \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m$ e proviamo a costruire x_{n_k} che converga a \tilde{x} .

Dato che X è I-numerabile, possiamo trovare $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sistema fondamentale di interni di \tilde{x} numerabile. Possiamo anche supporre che $U_{k+1} \subseteq U_k$ (lemma 2.81).

Costruiamo x_{n_k} ricorsivamente:

1. Sappiamo che $\tilde{x} \in C_0 = \overline{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$. Essendo U_0 un intorno di \tilde{x} si ha che $U_0 \cap \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$ per definizione di chiusura, dunque possiamo scegliere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_0} \in U_0$.
2. Supponiamo di aver individuato $n_0 < n_1 < \dots < n_k \in \mathbb{N}$ tali che $x_{n_i} \in U_i$. Dato che U_{k+1} è un intorno di \tilde{x} e che $\tilde{x} \in C_{n_k+1} = \overline{\{x_n \mid n \geq n_k + 1\}}$ concludiamo che $U_{k+1} \cap \{x_n \mid n \geq n_k + 1\} \neq \emptyset$, scegliamo dunque $x_{n_{k+1}}$ in questa intersezione. Segue in particolare che $x_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$.

Verifichiamo infine che $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$. Sia U un intorno di \tilde{x} . Per definizione di sistema fondamentale di interni esiste k_0 tale che $U_{k_0} \subseteq U$, ma allora per $k \geq k_0$ abbiamo $x_{n_k} \in U_k \subseteq U_{k_0} \subseteq U$ come voluto. \square

Fatto 2.268.

Il viceversa non è vero.

Proposizione 2.269 (II-numerabile implica Lindelöf).

Se uno spazio X è II-numerabile allora è Lindelöf.

Dimostrazione.

Consideriamo $U = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto. Sia $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerabile di X (garantita dalla II-numerabilità di X) e scriviamo $U_i = \bigcup_{n \in J_i} B_n$

con $J_i \subseteq \mathbb{N}$. Sia dunque $J = \bigcup_{i \in I} J_i \subseteq \mathbb{N}$ (in quanto sottoinsieme di \mathbb{N} abbiamo automaticamente che è numerabile). Dato che U è un ricoprimento allora anche $\{B_n\}_{n \in J}$ è un ricoprimento di X . Per ogni $n \in J$ scegliamo $j(n) \in I$ tale che $B_n \subseteq U_j$. Si ha che $\{U_{j(n)}\}_{n \in J}$ è un sottoricoprimento di U al più numerabile. \square

Proposizione 2.270 (Compatto e sequenzialmente compatto coincidono in II-numerabile).

Se X è II-numerabile allora X è compatto se e solo se X è sequenzialmente compatto.

Dimostrazione.

\implies) Dato che II-numerabile implica I-numerabile (2.87) abbiamo la tesi dalla proposizione precedente (2.267).

\impliedby) Sia per assurdo $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X senza sottoricoprimenti finiti. Vogliamo costruire una successione senza sottosuccessioni convergenti.

Dato che II-numerabile implica Lindelöf (2.269) supponiamo U numerabile passando ad un sottoricoprimento. Sia $x_0 \in U_0$ e poniamo $i_0 = 0$. Definiamo ricorsivamente

$$x_n \in X \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} U_{i_k} \cup \bigcup_{j=0}^{i_{n-1}} U_j \right) \neq \emptyset$$

e sia i_n tale che $x_n \in U_{i_n}$ (quell'insieme non è vuoto perché U non ammette sottoricoprimenti finiti). Per costruzione osserviamo che i_n è una successione strettamente crescente.

Supponiamo per assurdo che per una certa sottosuccessione $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ per qualche \tilde{x} . Dato che U è un ricoprimento esiste U_h tale che $\tilde{x} \in U_h$, ma per costruzione $x_{n_k} \notin U_h$ definitivamente (per esempio per $k > h$), quindi abbiamo trovato un intorno di \tilde{x} che non contiene la coda della successione, cioè $x_{n_k} \not\rightarrow \tilde{x}$. \square

Possiamo riassumere quanto detto nella seguente

Proposizione 2.271 (Compattezza e Numerabilità).

In generale compatto e sequenzialmente compatto sono concetti distinti.

Se lo spazio è I-numerabile allora compatto implica sequenzialmente compatto.

Se lo spazio è II-numerabile allora compatto e sequenzialmente compatto coincidono.

Limitatezza e Completezza

Proposizione 2.272 (Compatti in metrico sono limitati).

Se (X, d) è metrico allora visto con la topologia indotta si ha che se X è compatto allora d è limitata.

Dimostrazione.

Considero il ricoprimento $\{B(x_0, n)\}$. Se X è compatto allora questo ammette un sottoricoprimento finito, dunque per qualche $N \in \mathbb{N}$ si ha $B(x_0, N) = X$ da cui per la disuguaglianza triangolare

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq 2N.$$

□

Osservazione 2.273.

Non vale il viceversa, infatti come sappiamo ogni topologia indotta da una metrica si può esprimere come indotta da una metrica limitata (2.40).

Definizione 2.274 (Successione di Cauchy).

Una successione a valori in uno spazio metrico X è **di Cauchy** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m > N$.

Osservazione 2.275.

Le successioni convergenti sono di Cauchy (si vede applicando la disuguaglianza triangolare a x_n , x_m e il limite).

Definizione 2.276 (Spazio completo).

Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy converge.

Proposizione 2.277 (Cauchy con sottosuccessione convergente è convergente).

Se da una successione di Cauchy possiamo estrarre una sottosuccessione convergente allora la successione di partenza converge allo stesso limite.

Dimostrazione.

Supponiamo $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$. Dato $\varepsilon > 0$ vogliamo mostrare che definitivamente $d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon$.

Dato che la successione è di Cauchy sappiamo che esiste N tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ per ogni $m, n > N$. Dato che $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ sappiamo anche che esiste k_0 tale che per ogni $k > k_0$ si ha $d(x_{n_k}, \tilde{x}) < \varepsilon/2$. Sia allora $M = \max\{N, n_{k_0}\}$. Se $n \geq M$, considerato k tale che $n_k > M$ si ha che

$$d(x_n, \tilde{x}) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}) < \varepsilon.$$

□

Corollario 2.278 (Metrico compatto per successioni è completo).

Se uno spazio metrico è sequenzialmente compatto allora è completo.

Dimostrazione.

Sia $\{x_n\}$ di Cauchy. Per compattezza sequenziale possiamo estrarre una sottosuccessione convergente e per la proposizione sopra si ha che $\{x_n\}$ converge. □

Osservazione 2.279.

Uno spazio completo non è necessariamente sequenzialmente compatto (per esempio \mathbb{R}^n).

Osservazione 2.280.

Uno spazio (metrico) limitato e completo può comunque non essere compatto (2.401).

Cerchiamo di modificare leggermente la definizione di limitatezza in modo che, unita con la condizione di completezza, garantisca compattezza.

Definizione 2.281 (Spazio totalmente limitato).

Uno spazio metrico X è **totalmente limitato** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di X costituito da palle aperte di raggio ε .

Proposizione 2.282 (Totalmente limitato implica limitato).

Se X è totalmente limitato allora è limitato.

Dimostrazione.

Consideriamo $\varepsilon = 1$. Siano dunque $B_1(x_1), \dots, B_1(x_n)$ le palle che coprono X garantite dalla definizione di totale limitatezza. Sia

$$R = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{d(x_i, x_j)\} + 2$$

e mostriamo che $d(x, y) < R$ per ogni $x, y \in X$. Supponiamo che $x \in B_1(x_i)$ e $y \in B_1(x_j)$ (tanto le palle coprono), si ha che

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) < 1 + \max\{d(x_k, x_h)\} + 1 = R.$$

□

Osservazione 2.283.

Non vale il viceversa.

Proposizione 2.284 (Totalmente limitato implica II-numerabile).

Se X è totalmente limitato allora è II-numerabile.

Dimostrazione.

Ricordiamo che uno spazio metrico separabile è II-numerabile (2.85). Mostriamo dunque che totalmente limitato implica separabile.

Osserviamo che per totale limitatezza, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esiste un ricoprimento finito di palle aperte dello spazio dove le palle hanno raggio $\varepsilon = \frac{1}{n}$ (sia $\{B(x_i^n, \frac{1}{n})\}_{i \in \{1, \dots, k_n\}}$ un tale ricoprimento). Consideriamo

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{k_n} \{x_i^n\} \subseteq X.$$

Chiaramente E è al più numerabile. Proviamo a mostrare che E è denso.

Basta mostrare che per ogni $x \in X$ e per ogni $R > 0$ si ha $E \cap B(x, R) \neq \emptyset$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < R$ e sia x_i^n tale che $x \in B(x_i^n, \frac{1}{n})$, che possiamo fare perché $\{B(x_i^n, \frac{1}{n})\}_{i \in \{1, \dots, k_n\}}$ è un ricoprimento. Si ha quindi che

$$x \in B\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right) \implies x_i^n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(x, R),$$

in particolare $x_i^n \in E \cap B(x, R) \neq \emptyset$.

□

Teorema 2.285 (Caratterizzazione di compattezza per metrici).

Se X è uno spazio metrico allora i seguenti sono fatti equivalenti:

1. X è compatto.
2. X è sequenzialmente compatto.
3. X è completo e totalmente limitato.

Dimostrazione.

1 \implies 2) Dato che gli spazi metrici sono I-numerabili (2.80) questa freccia è già stata trattata.

2 \implies 3) Abbiamo visto che la sequenziale compattezza implica completezza (2.278), quindi basta mostrare la totale limitatezza.

Supponiamo per assurdo che X non sia totalmente limitato e costruiamo una successione senza sottosuccessioni convergenti. Negando la totale limitatezza si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che non è possibile coprire X con un numero finito di palle di raggio ε . Sia allora $x_0 \in X$ un punto qualsiasi e scegliamo x_k tale che

$$x_k \in X \setminus (B(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{k-1}, \varepsilon)) \neq \emptyset.$$

Osserviamo che x_n non ha sottosuccessioni di Cauchy, infatti per ogni $n \neq m$ si ha $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per costruzione. Abbiamo dunque trovato una successione che non ammette sottosuccessioni convergenti (le quali devono necessariamente essere di Cauchy) \nexists .

3 \implies 1) Abbiamo già mostrato che totalmente limitato implica II-numerabile (2.284) e sappiamo che per spazi II-numerabili compattezza e compattezza per successioni si equivalgono (2.270). Basta far vedere che X è sequenzialmente compatto.

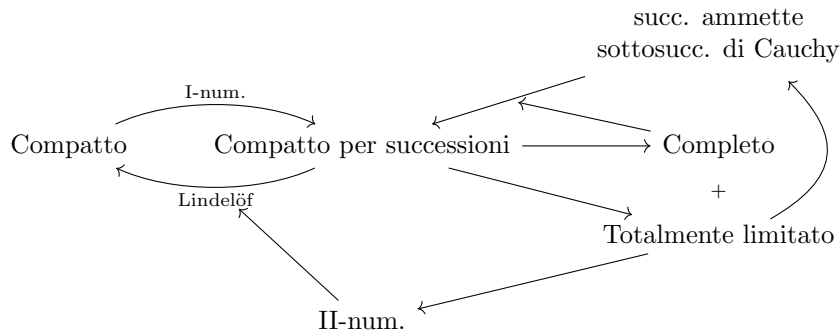
Sia $\{x_n\}$ una successione in X . Proviamo ad estrarre una sottosuccessione convergente. Dato $k \in \mathbb{N}$ fissiamo un ricoprimento finito U_k dato da palle di raggio $\frac{1}{k}$ e costruiamo ricorsivamente una sottosuccessione di $\{x_n\}$ che sia di Cauchy. Questo ci permetterà di concludere dato che lo spazio è completo e quindi questa successione sarà anche convergente.

Dato che U_1 è un ricoprimento finito di X , esiste $V_1 \in U_1$ che contiene infiniti termini della successione. Fissiamo n_1 tale che $x_{n_1} \in V_1$.

Supponiamo ora di aver costruito termini precedenti della successione tale che $x_{n_i} \in V_1 \cap \dots \cap V_i$ e $V_1 \cap \dots \cap V_i = W_i$ stesso contenga infiniti termini della successione di partenza. Consideriamo ora il ricoprimento finito di W_k dato da $\{U \cap W_k \mid U \in U_{k+1}\}$. Dato che W_k contiene infiniti termini della successione, esiste $V_{k+1} \in U_{k+1}$ tale che $V_{k+1} \cap W_k = W_{k+1}$ contiene infiniti termini della successione. Sia allora $x_{n_{k+1}} \in W_{k+1}$ tale che $n_{k+1} > n_k$.

Affermiamo che x_{n_k} definita come sopra è di Cauchy. Dato $\varepsilon > 0$ sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{2}{m} < \varepsilon$. Osserviamo che per $h, k > m$ si ha che $x_{n_h}, x_{n_k} \in W_m \subseteq V_m$ il quale ha diametro $\frac{2}{m} < \varepsilon$, dunque $d(x_{n_h}, x_{n_k}) < \varepsilon$. \square

Possiamo riassumere le implicazioni che abbiamo usato in questa sezione con il seguente diagramma:



Numero di Lebesgue e Uniforme continuità

Definizione 2.286 (Numero di Lebesgue).

Dato X spazio metrico e Ω un suo ricoprimento si dice che Ω **ammette numero di Lebesgue** $\varepsilon > 0$ se per ogni $x \in X$ esiste $U \in \Omega$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Osservazione 2.287.

Non tutti i ricoprimenti ammettono numero di Lebesgue (2.402)

Teorema 2.288 (Ogni ricoprimento aperto in compatto ammette numero di Lebesgue).

Se X è uno spazio metrico compatto allora ogni ricoprimento aperto ammette un numero di Lebesgue.

Dimostrazione.

L'idea è supporre che non ci sia numero di Lebesgue e considerare una successione di centri di palle non contenute in alcun elemento del ricoprimento. Per compattezza posso supporre che la successione converga e con questo fatto possiamo mostrare che definitivamente le palle da cui eravamo partiti sono contenute in un aperto del ricoprimento che contiene il limite della successione.

Sia Ω un ricoprimento aperto di X e supponiamo per assurdo che non ammetta numero di Lebesgue. Si ha in particolare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ tale che $B(x_n, 2^{-n})$ non è contenuta in alcun aperto di Ω . Dato che uno spazio metrico compatto è sequenzialmente compatto (2.285) possiamo estrarre una sottosuccessione convergente x_{n_k} da x_n . Sia \tilde{x} il suo limite.

Dato che Ω è un ricoprimento di X sappiamo che esiste $U \in \Omega$ tale che $\tilde{x} \in U$. Siccome U è aperto allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(\tilde{x}, \varepsilon) \subseteq U$. Per definizione di limite, esiste un k_0 tale che per $k > k_0$ si ha che $x_{n_k} \in B(\tilde{x}, \varepsilon/3)$. Per disuguaglianza triangolare allora, per $k \geq k_0$, abbiamo che

$$B(x_{n_k}, \varepsilon/3) \subseteq B(\tilde{x}, 2\varepsilon/3) \subseteq B(\tilde{x}, \varepsilon) \subseteq U.$$

Poiché $2^{-n_k} \rightarrow 0$ sappiamo che esiste $k_1 > k_0$ tale che $2^{-n_{k_1}} < \varepsilon/3$, ma allora

$$B(x_{n_{k_1}}, 2^{-n_{k_1}}) \subseteq B(x_{n_{k_1}}, \varepsilon/3) \subseteq U,$$

abbiamo quindi trovato un elemento del ricoprimento che contiene $B(x_{n_{k_1}}, 2^{-n_{k_1}})$ nonostante avessimo supposto che $B(x_n, 2^{-n})$ non fosse contenuta in alcun elemento del ricoprimento. \neq \square

Definizione 2.289 (Funzione uniformemente continua).

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è **uniformemente continua** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Osservazione 2.290.

Le funzioni uniformemente continue sono continue.

Osservazione 2.291.

Non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue (2.404)

Osservazione 2.292.

Le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue.

Dimostrazione.

Se $f : X \rightarrow Y$ è M -lipschitziana sappiamo che $\forall x, y \in X$

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq M d_X(x, y),$$

dunque, dato $\varepsilon > 0$, scegliendo $\delta < \varepsilon/M$ verifichiamo la condizione di uniforme continuità. \square

Teorema 2.293 (Heine-Cantor).

Siano X, Y spazi metrici con X compatto. Se $f : X \rightarrow Y$ è continua allora è uniformemente continua.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Esiste dunque $\varepsilon > 0$ tale che esistono due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ a valori in X tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, y_n) < 2^{-n} \quad \text{ma} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Poiché X è compatto per successioni estraiamo una sottosuccessione x_{n_k} convergente a \tilde{x} . Dato che $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$ si ha anche che $y_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$.

Per continuità di f in \tilde{x} si ha che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in B(\tilde{x}, \delta), \quad d(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon/3.$$

Poiché $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ e $y_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ si ha che esiste k_0 tale che per ogni $k > k_0$ troviamo $x_{n_k}, y_{n_k} \in B(\tilde{x}, \delta)$, dunque definitivamente

$$d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), f(\tilde{x})) + d(f(\tilde{x}), f(y_{n_k})) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$$

che contraddice le ipotesi su $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. \square

Osservazione 2.294.

Una funzione uniformemente continua porta successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.

Dimostrazione.

Sia $\{x_n\}$ di Cauchy e f uniformemente continua. La condizione affinché $\{f(x_n)\}$ sia di Cauchy è che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $n, m > N$ si ha $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Sia $\delta > 0$ il numero garantito dalla definizione di uniforme continuità e sia N tale che $d(x_n, x_m) < \delta$ per ogni $n, m > N$. Vediamo che questo N è quello cercato per mostrare che $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy applicando la definizione di uniforme continuità. \square

Concludiamo studiando la seguente domanda (argomento trattato in anni accademici precedenti al 22/23):

siano X, Y spazi metrici e siano $A \subseteq X$ e $f : A \rightarrow Y$ continua. Quando è possibile estendere f a $f : \overline{A} \rightarrow Y$ in modo continuo?

Osservazione 2.295.

Non è sempre possibile (2.403).

Teorema 2.296 (Estensione di uniformemente continua alla chiusura del dominio).

Siano X, Y metrici con Y completo e $A \subseteq X$. Se $f : A \rightarrow Y$ è uniformemente continua allora f si estende in modo unico a $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow Y$ continua.

Dimostrazione.

Sia $\bar{x} \in \bar{A}$. Poiché gli spazi metrici sono I-numerabili (2.80) sappiamo che esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in A tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$. Questa successione è quindi convergente in X che è metrico, dunque $\{x_n\}$ è di Cauchy. Per uniforme continuità di f sappiamo che $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy e per completezza di Y si ha che converge $f(x_n) \rightarrow \bar{y} \in Y$.

Se vogliamo costruire \bar{f} continua, siccome le funzioni continue commutano con l'operazione di prendere limite (2.99), si dovrà avere necessariamente $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{y}$.

Mostriamo dunque che \bar{f} così definita è ben definita e continua:

buona definizione) Se $\{x'_n\}$ è una seconda successione a valori in A che tende a \bar{x} , supponiamo per assurdo che $f(x'_n) \rightarrow \bar{y}' \neq \bar{y}$. Siano allora V_1 e V_2 intorni aperti disgiunti in Y di \bar{y} e \bar{y}' . Sappiamo che definitivamente $f(x_n) \in V_1$ e $f(x'_n) \in V_2$, dunque definitivamente che $x_n \in f^{-1}(V_1)$ e $x'_n \in f^{-1}(V_2)$ con $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$ dove $f^{-1}(V_1)$ e $f^{-1}(V_2)$ sono aperti in A per continuità di f , ma questo è assurdo perché $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ hanno lo stesso limite in X .

Continuità) Verifichiamo la continuità in x_0 per ogni $x_0 \in \bar{A}$. Dato che X è uno spazio metrico è in particolare I-numerabile, quindi continuità equivale a continuità per successioni (2.99). Sia allora $\{x_n\}$ una successione a valori in \bar{A} tale che $x_n \rightarrow x_0$. Dato che f è uniformemente continua, sia $\delta > 0$ tale che $d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ per ogni $x, y \in A$.

Sappiamo che definitivamente $d(x_n, x_0) < \delta/2$, sia dunque $x'_n \in A$ tale che $d(x_0, x'_n) < \delta/2$, che possiamo trovare perché $x_n \in \bar{A}$ (2.99). Per disuguaglianza triangolare

$$d(x_n, x'_n) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x'_n) < \delta,$$

dunque, per come abbiamo definito \bar{f} si ha che

$$d(\bar{f}(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon/2, \quad d(f(x'_n), \bar{f}(x_0)) < \varepsilon/2,$$

da cui, di nuovo per disuguaglianza triangolare, $d(\bar{f}(x_n), \bar{f}(x_0)) < \varepsilon$. Abbiamo quindi verificato che $\{\bar{f}(x_n)\}$ converge a $\bar{f}(x_0)$ come voluto. \square

Compattezza in \mathbb{R}^n

Vediamo ora come si comportano gli insiemi compatti sullo spazio metrico più naturale per la nostra intuizione spaziale, \mathbb{R}^n .

Teorema 2.297.

L'intervallo $[0, 1]$ è compatto.

Dimostrazione.

Sia $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$ e consideriamo

$$A = \{t \in [0, 1] \mid \exists J \subseteq I \text{ finito t.c. } [0, t] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i\},$$

cioè “il massimo intervallo compreso in $[0, 1]$ che si comporta come un compatto”. La tesi equivale a mostrare $1 \in A$. Per fare ciò mostriamo che A contiene $[0, \sup A]$ e mostriamo che se $\sup A \neq 1$ allora $\sup A \neq \sup A$.

Osserviamo che $0 \in A$ dato che U è un ricoprimento e dunque esiste $U_i \in U$ tale che $\{0\} = [0, 0] \subseteq U_i$. Osserviamo inoltre che $A \neq \{0\}$, infatti se $0 \in U_i$, essendo U_i aperto, si ha che $\exists \varepsilon > 0$ tale che $[0, \varepsilon] \subseteq U_i$ per la definizione di aperti euclidei. Osserviamo in particolare allora che $\varepsilon/2 \in A$.

Se $a \in A$ allora $[0, a] \subseteq A$, infatti se $\{U_1, \dots, U_n\}$ copre $[0, a]$ a maggior ragione copre i suoi sottoinsiemi.

Se $s = \sup A$ allora $[0, s] \subseteq A$, infatti per ogni $a \in [0, s)$, per definizione di estremo superiore, esiste $a' \in [a, s)$ tale che $a' \in A$ e per quanto detto questo implica $a \in A$.

Vediamo in realtà che $s \in A$, infatti esiste $U_{i_0} \in U$ tale che $s \in U_{i_0}$ in quanto ricoprimento. Essendo U_{i_0} aperto esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Sia allora $a \in [0, s)$ tale che $s - a < \varepsilon$. Per quanto detto $[0, a]$ è coperto da finiti U_i , se a questa collezione aggiungiamo U_{i_0} allora avremo coperto $[0, a] \cup (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \supseteq [0, s]$.

Per concludere mostriamo che $s = 1$, infatti se per assurdo avessimo $s \neq 1$ allora per quanto detto subito sopra $s + \varepsilon/2 \in A$, contraddicendo l'ipotesi che s sia l'estremo superiore di A . \square

Applicazione 2.298 (Compattezza degli intervalli).

$[a, b]$ è compatto mentre (a, b) , $[a, b)$ e $(a, b]$ non sono compatti.

Dimostrazione.

Visto che la compattezza è invariante per omeomorfismo basta osservare che

$$[a, b] \cong [0, 1],$$

$$(a, b) \cong (-1, 1) \cong \mathbb{R},$$

e

$$(a, b] \cong [a, b] \cong [0, 1] \cong [0, +\infty),$$

dove negli ultimi due casi l'omeomorfismo finale è dato dalla funzione $\tan(\frac{\pi}{2}x)$. \square

Teorema 2.299 (Heine-Borel).

Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ allora Y è compatto se e solo se Y è chiuso e limitato.

Dimostrazione.

\implies) Se Y è compatto sappiamo che è limitato (2.272). Siccome \mathbb{R}^n è uno spazio Hausdorff sappiamo anche che i compatti sono chiusi (2.239).

\impliedby) Se Y è limitato allora $\exists R > 0$ tale che $Y \subseteq [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Osserviamo che $[-R, R]^n$ è compatto perché omeomorfo a $[0, 1]^n$ che è prodotto di spazi compatti (2.248). Abbiamo quindi che Y è un chiuso contenuto in un compatto, dunque è compatto (2.237). \square

Applicazione 2.300.

\mathbb{R}^n è completo.

Dimostrazione.

Ogni successione di Cauchy cade definitivamente in una palla aperta, che è contenuta in una palla chiusa. Questa è chiusa e limitata, dunque è compatta per Heine-Borel (2.299). Essendo \mathbb{R}^n uno spazio metrico è I-numerabile (2.80), dunque la palla chiusa è anche compatta per successioni (2.271) e sappiamo che le successioni di Cauchy in spazi compatti per successioni convergono (2.277). \square

Teorema 2.301 (Weierstrass).

Se X è compatto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora f ammette massimo e minimo.

Dimostrazione.

Dato che le funzioni continue mandano compatti in compatti (2.229) si ha che $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ è compatto, cioè è chiuso e limitato (2.299). Dalla limitatezza osserviamo che $\sup f(X), \inf f(X) \in \mathbb{R}$ e dalla chiusura vediamo che questi sono effettivamente un massimo e un minimo (realizzati per esempio dai limiti di successioni x_i tali che $f(x_i) \rightarrow \sup f(X)$ o $f(x_i) \rightarrow \inf f(X)$ (stiamo usando il fatto che chiuso e chiuso per successioni coincidono in metrico (2.99))). \square

Teorema 2.302 (Equivalenza delle norme su \mathbb{R}^n).

Tutte le norme su uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione finita inducono la stessa topologia.

Dimostrazione.

A meno di isomorfismo consideriamo come spazio \mathbb{R}^n . Mostriamo che le mappe $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue (dove gli spazi sono letti con la topologia euclidea). Fatto ciò potremo mostrare che tutte le norme sono bilipschitziane tra loro e concludere per (2.35).

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ e posto $M = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|e_i\|$ si ha che

$$\begin{aligned} \left| \|x\| - \|y\| \right| &\stackrel{\text{dis.triangolare}}{\leq} \|x - y\| = \left\| \sum x_i e_i - \sum y_i e_i \right\| = \\ &= \left\| \sum (x_i - y_i) e_i \right\| \leq \sum |x_i - y_i| \|e_i\| \leq \\ &\leq M \|x - y\|_1, \end{aligned}$$

cioè ogni norma è M -lipschitziana alla distanza 1, che è topologicamente equivalente alla distanza euclidea (2.37). Abbiamo quindi mostrato che $\|\cdot\|$ è continua.

Per il teorema di Weierstrass (2.301) $\|\cdot\| : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ammette massimo A e minimo B . Osserviamo che $A, B > 0$ in quanto immagini tramite una norma e $0 \notin S^{n-1}$. Se con $|\cdot|$ indichiamo la norma euclidea si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$B|x| \leq |x| \left\| \frac{x}{|x|} \right\| = \|x\| = |x| \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \leq A|x|.$$

Se $x = 0$ allora $|x| = \|x\| = 0$ quindi è un caso vacuo. Abbiamo quindi mostrato che la norma euclidea e $\|\cdot\|$ sono bilipschitziane, quindi inducono la stessa topologia. \square

Osservazione 2.303.

Potevamo evitare di usare il fatto che le norme 1 e 2 sono equivalenti ragionando con le sfere rispetto alla norma 1.

2.11 Topologia Quoziente

Definiamo una topologia sui quozienti di spazi topologici

Definizione 2.304 (Spazio quoziente).

Sia X uno spazio topologico e sia \sim una relazione di equivalenza su X . Uno **spazio quoziente** Y di X rispetto alla relazione \sim è uno spazio topologico tale che esiste una mappa continua $f : X \rightarrow Y$ che rispetta \sim ($x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$) e tale che per ogni Z spazio topologico dotato di mappa continua $g : X \rightarrow Z$ che rispetta \sim esiste un'unica mappa $h : Y \rightarrow Z$ continua che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \swarrow h \\ Z & & \end{array}$$

Osservazione 2.305.

f è necessariamente surgettiva, altrimenti h non potrebbe essere unica.

Proposizione 2.306 (Esistenza e unicità dello spazio quoziente).

Sia X uno spazio topologico e sia \sim una relazione di equivalenza su X , allora esiste uno spazio quoziente unico a meno di omeomorfismo canonico.

Dimostrazione.

Unicità) È un argomento per proprietà universale. Per uno schema generale vedi (A.19).

Esistenza) Se X/\sim è l'insieme quoziente e $\pi : X \rightarrow X/\sim$ è la proiezione al quoziente allora definiamo la **topologia quoziente** su X/\sim come:

$$A \subseteq X/\sim \text{ è aperto } \iff \pi^{-1}(A) \text{ è aperto in } X.$$

Verifichiamo che è una topologia:

- $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $\pi^{-1}(X/\sim) = X$.
- Se $\pi^{-1}(A_1)$ e $\pi^{-1}(A_2)$ sono aperti in X allora

$$\pi^{-1}(A_1) \cap \pi^{-1}(A_2) = \pi^{-1}(A_1 \cap A_2)$$

è aperto in X , dunque $A_1 \cap A_2$ è aperto in X/\sim .

- Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di X/\sim allora $\{\pi^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di X , dunque

$$\bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(A_i) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

è aperto in X , dunque $\bigcup_{i \in I} A_i$ è un aperto del quoziente.

Mostriamo ora che questo spazio rispetta la proprietà universale:
 Se Y è uno spazio topologico e vale il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\sim \\ f \downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ Y & & \end{array}$$

(cioè $f = \bar{f} \circ \pi$) dobbiamo mostrare che f è continua se e solo se \bar{f} è continua, in tal caso è chiaro che \bar{f} è l'unica mappa che fa commutare il diagramma. La tesi segue dalla seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} f \text{ è continua} \\ \forall A \subseteq Y \text{ aperto, } f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X \\ \forall A \subseteq Y \text{ aperto, } \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A)) \text{ è aperto in } X \\ \forall A \subseteq Y \text{ aperto, } \bar{f}^{-1}(A) \text{ è aperto in } X/\sim \\ \bar{f} \text{ è continua} \end{aligned}$$

□

Riportiamo nuovamente la definizione del modello di spazio quoziente che abbiamo trovato:

Definizione 2.307 (Topologia quoziente).

Sia X uno spazio topologico e sia \sim una relazione di equivalenza su X . Se X/\sim è l'insieme quoziente e $\pi : X \rightarrow X/\sim$ è la proiezione al quoziente allora la **topologia quoziente** su X/\sim è data come segue:

$$A \subseteq X/\sim \text{ è aperto} \iff \pi^{-1}(A) \text{ è aperto in } X.$$

Teorema 2.308 (Caratterizzazione della topologia quoziente).

La topologia quoziente su X/\sim è la più fine che rende $\pi : X \rightarrow X/\sim$ continua.

Dimostrazione.

Dalla definizione è evidente che questa topologia rende π continua. Sia ora τ una topologia su X/\sim che rende π continua. Osserviamo che per ogni $A \in \tau$ si deve avere $\pi^{-1}(A)$ aperto in X , cioè A appartiene alla topologia quoziente, cioè la topologia quoziente è più fine di τ . □

2.11.1 Passaggio a quoziente e Identificazioni

Definizione 2.309 (Funzioni ottenute per passaggio a quoziente).

Se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua e $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$ allora è ben definita

$$\bar{f} : \begin{array}{ccc} X/\sim & \longrightarrow & Y \\ [x] & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

la quale è continua per quanto detto sopra. Si dice che \bar{f} è stata ottenuta **per passaggio al quoziente** di f .

Proposizione 2.310.

Se \bar{f} è ottenuta per passaggio al quoziente come sopra si ha che

- \bar{f} è iniettiva se e solo se $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 \sim x_2$
- \bar{f} è surgettiva se e solo se f è surgettiva.

Dimostrazione.

Sappiamo dalla buona definizione che $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$. Se \bar{f} è iniettiva allora

$$f(x_1) = f(x_2) \iff \bar{f}([x_1]) = \bar{f}([x_2]) \implies [x_1] = [x_2] \implies x_1 \sim x_2.$$

Dato che $\bar{f} \circ \pi = f$ e π è surgettiva si ha che \bar{f} è surgettiva se e solo se f è surgettiva. \square

Osservazione 2.311.

Se f è surgettiva e $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ allora \bar{f} è una bigezione continua.

In generale non esistono criteri semplici per verificare quando \bar{f} è un omeomorfismo. Definiamo allora un tipo di funzione che induce un omeomorfismo se come relazione imponiamo $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$:

Definizione 2.312 (Identificazione).

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ continua è detta **identificazione** se valgono le seguenti condizioni:

1. f è surgettiva
2. $A \subseteq Y$ è aperto se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto in X
(equivalentemente C chiuso in Y se e solo se $f^{-1}(C)$ chiuso in X).

Teorema 2.313 (Identificazione induce omeomorfismo per quoziente).

Siano $f : X \rightarrow Y$ una identificazione e \sim una relazione di equivalenza su X data da $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. Allora la mappa $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ ottenuta da f passando al quoziente è un omeomorfismo

Dimostrazione.

Le identificazioni sono continue e surgettive e la condizione sulla relazione garantisce che $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ è ben definita, bigettiva e continua (2.310).

Resta da verificare che \bar{f} è aperta. Sia allora $A \subseteq X/\sim$ aperto. Siccome f è una identificazione abbiamo che

$$\bar{f}(A) \text{ aperto} \iff f^{-1}(\bar{f}(A)) \text{ aperto,}$$

ma $f^{-1} \circ \bar{f} = \pi^{-1}$ e per continuità di π sappiamo che $\pi^{-1}(A)$ è aperto. \square

Osservazione 2.314.

In realtà \bar{f} definita come sopra è un omeomorfismo se e solo se f è una identificazione.

Proposizione 2.315 (Criterio sufficiente per definire identificazioni).

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua e surgettiva. Si ha che se f è aperta o chiusa allora è una identificazione.

Dimostrazione.

*) Dobbiamo controllare che se $f^{-1}(A)$ è aperto allora A è aperto, ma poiché f è surgettiva $f(f^{-1}(A)) = A$ e poiché f è aperta abbiamo che $f^{-1}(A)$ aperto implica $f(f^{-1}(A)) = A$ aperto.

*) Dimostrazione identica ma sostituendo aperti con chiusi. \square

Osservazione 2.316.

Esistono identificazioni che non sono né aperte né chiuse (2.405)

2.11.2 Insiemi saturi

Definizione 2.317 (Insieme saturo).

Data una funzione $f : X \rightarrow Y$, un insieme $A \subseteq X$ si dice f -saturo (o saturo se f è chiara dal contesto) se

$$f^{-1}(f(A)) = A,$$

cioè se $x \in A$ e $f(x') = f(x)$ allora $x' \in A$.

Proposizione 2.318 (Gli f -saturi sono le preimmagini tramite f).

Data una funzione $f : X \rightarrow Y$ si ha che

$$A \subseteq X \text{ è saturo} \iff \exists B \subseteq Y \text{ t.c. } A = f^{-1}(B)$$

Dimostrazione.

Se $A = f^{-1}(B)$ (a meno di restringere B supponiamo $B \subseteq f(X)$) allora $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B) = A$.

Se invece $f^{-1}(f(A)) = A$ allora $B = f(A)$ rispetta la condizione voluta. \square

Osservazione 2.319.

Se $\pi : X \rightarrow X/\sim$ è la proiezione allora gli insiemi π -saturi di X sono le unioni di classi di equivalenza.

Dimostrazione.

$$A = \pi^{-1}(\pi(A)) = \{x \in X \mid \exists x' \in A \text{ t.c. } x \sim x'\} = \bigcup_{x \in A} [x]. \quad \square$$

Proposizione 2.320 (Caratterizzazione di aperti e chiusi saturi).

Gli aperti / chiusi saturi sono identificati dalle seguenti proprietà:

1. $A \subseteq X/\sim$ è aperto se e solo se $A = \pi(B)$ con B aperto saturo di X .
2. $C \subseteq X/\sim$ è chiuso se e solo se $C = \pi(D)$ con D chiuso saturo di X .

Dimostrazione.

1) \implies) Osserviamo che $\pi^{-1}(A)$ è aperto per la continuità di π e saturo in quanto controimmagine tramite la funzione in esame (2.318). Per concludere basta osservare che siccome π è surgettiva si ha $A = \pi(\pi^{-1}(A))$.

\impliedby) Se $A = \pi(B)$ con B aperto saturo allora $\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(\pi(B)) = B$ dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che B è saturo. Abbiamo quindi mostrato che $\pi^{-1}(A)$ è aperto in X , dunque per definizione di topologia quoziente A è aperto in X/\sim .

2) Il caso per chiusi è del tutto analogo. \square

Osservazione 2.321.

In generale abbiamo la seguente corrispondenza biunivoca:

$$\{\text{aperti di } X/\sim\} \xleftrightarrow{\pi} \{\text{aperti saturi di } X\}$$

Osservazione 2.322.

Dato che $\pi : X \rightarrow X/\sim$ è continua e surgettiva si ha che quozienti di compatti sono compatti e quozienti di connessi sono connessi.

2.11.3 Collassamento, Unione disgiunta e Bouquet

Definizione 2.323 (Collassamento).

Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$. Definiamo il **collassamento di X su A** come lo spazio quoziente X/\sim ottenuto definendo la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } x, y \in A.$$

Come notazione scriviamo $X/\sim = X/A$. Si dice che X/A è ottenuto da X **collassando A ad un punto**.

Applicazione 2.324.

Detti $D^n = \{P \in \mathbb{R}^n \mid |P| \leq 1\}$ e $S^n = \{P \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |P| = 1\}$ si ha che

$$D^n/S^{n-1} \cong S^n.$$

Dimostrazione.

Cerchiamo di costruire una identificazione $f : D^n \rightarrow S^n$ in modo che $f(x) = f(y)$ se e solo se $x = y$ o $x, y \in S^{n-1}$. Se riusciremo a fare ciò avremo la tesi per (2.313).

Proviamo a definire

$$f(v) = (\lambda(|v|)v, g(|v|)),$$

cioè vogliamo trovare una funzione “altezza” (g) e una funzione “scalo” (λ) in modo da portare cerchi concentrici del disco alla stessa altezza e alla stessa distanza dall’asse centrato in 0 e passante per i poli nord e sud di S^n .

Dobbiamo dunque porre $g(0) = -1$ e $g(1) = 1$ (perché vogliamo portare il centro nel polo sud e il bordo nel polo nord). Una funzione che ha questo comportamento è $g(|v|) = 2|v|^2 - 1$. Proviamo dunque a ricavare λ in modo $f(v)$ stia sulla sfera:

$$1 = |(\lambda(|v|)v, 2|v|^2 - 1)|^2 = \lambda^2|v|^2 + 4|v|^4 - 4|v|^2 + 1 \implies \lambda^2 = 4 - 4|v|^2.$$

Scegliamo $\lambda(|v|) = 2\sqrt{1 - |v|^2}$ e verifichiamo che

$$f(v) = (2\sqrt{1 - |v|^2}v, 2|v|^2 - 1)$$

è una identificazione della forma richiesta:

Buona definizione) Per costruzione $f(v) \in S^n$.

Continuità) Funzione continua su ogni entrata.

Surgettività) Evidente dal significato geometrico della funzione.

Identificazione) Basta vedere che la mappa è chiusa (2.315) e questo segue dal fatto che è continua, D^n è compatto e S^n è T_2 (2.243).

Relazione desiderata) Dal significato geometrico della mappa è chiaro che $f(v) = f(v') \implies v = v'$ oppure $|v| = |v'| = 1$, cioè $v, v' \in S^{n-1}$. \square

Vediamo ora come possiamo “attaccare” due spazi topologici tra loro. L’idea è considerarli come un unico spazio topologico formato dai due separati e poi imporre una relazione che collassa un insieme di due punti, uno per spazio.

Definizione 2.325 (Unione disgiunta).

Siano X e Y due spazi topologici. Su $X \sqcup Y$ imponiamo la seguente topologia:

$$A \subseteq X \sqcup Y \text{ aperto} \iff A \cap X \text{ aperto e } A \cap Y \text{ aperto.}$$

Osservazione 2.326.

X e Y sono aperti in $X \sqcup Y$, quindi $X \sqcup Y$ è sconnesso.

Definizione 2.327 (Bouquet).

Siano X e Y spazi topologici e fissiamo $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Il **bouquet** o **wedge**⁴ di (X, x_0) e (Y, y_0) è il quoziente

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}.$$

Osservazione 2.328.

Cambiare i punti x_0 e y_0 può cambiare lo spazio bouquet che otteniamo. Ciò nonostante, se abbiamo fissato x_0 e y_0 , x_0 e y_0 sono chiari da contesto oppure se x_0 e y_0 sono irrilevanti scriveremo

$$X \vee Y.$$

Proposizione 2.329 (I fattori si immergono nel bouquet).

Le mappe

$$i : X \rightarrow X \vee Y, \quad j : Y \rightarrow X \vee Y$$

indotte dalle inclusioni di X e Y in $X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche.

Dimostrazione.

Chiaramente i e j sono continue (composizione di immersione e proiezione) e iniettive ($\pi : X \sqcup Y \rightarrow X \vee Y$ è iniettiva eccetto in x_0 e y_0 , ma X contiene solo x_0 e Y solo y_0). Per mostrare che i è un omeomorfismo con l’immagine basta verificare che $i : X \rightarrow i(X)$ è aperta (per simmetria questa dimostrazione può essere ripetuta per j).

Vogliamo quindi mostrare che se $A \subseteq X$ è aperto allora $i(A)$ è aperto in $i(X)$. Si presentano due casi: $x_0 \in A$ e $x_0 \notin A$.

$x_0 \notin A$ Osserviamo che $\pi^{-1}(i(A)) \cap X = A$ e che $\pi^{-1}(i(A)) \cap Y = \emptyset$, dunque per definizione della topologia su $X \sqcup Y$ abbiamo che $\pi^{-1}(i(A))$ è aperto in $X \sqcup Y$, quindi per definizione di topologia quoziente $i(A)$ è aperto in $X \vee Y$, quindi anche in $i(X)$ per definizione di topologia di sottospazio.

$x_0 \in A$ Se troviamo U aperto tale che $i(A) = i(X) \cap U$ allora per definizione di topologia di sottospazio avremmo finito. Osserviamo che $\pi^{-1}(i(A)) \cap X = A$ e $\pi^{-1}(i(A)) \cap Y = \{y_0\}$. Sia $U = i(A) \cup i(Y)$. Osserviamo che

$$U \cap i(X) = (i(A) \cup i(Y)) \cap i(X) = i(A) \cap i(X) \cup i(Y) \cap i(X) = i(A) \cup \{x_0\} = i(A)$$

e che $\pi^{-1}(U) \cap X = A$ e $\pi^{-1}(U) \cap Y = Y$, che sono aperti, dunque $\pi^{-1}(U)$ è aperto in $X \sqcup Y$, dunque U è aperto in $X \vee Y$ come voluto. \square

⁴Il simbolo usato per wedge dai professori è “ \vee ”, che in L^AT_EX si scrive con `\vee`, non `\wedge` come uno potrebbe sperare.

Proposizione 2.330 (T_1 passa al bouquet e immersioni sono chiuse).

Se X e Y sono T_1 allora anche $X \vee Y$ è T_1 e le mappe $i : X \rightarrow X \vee Y$, $j : Y \rightarrow X \vee Y$ sono chiuse.

Dimostrazione.

Bouquet T_1) I punti di $X \vee Y$ si sollevano tramite π^{-1} ad un singoletto o a $\{x_0, y_0\}$. Se X e Y sono T_1 allora tutti i sottoinsiemi finiti di $X \sqcup Y$ sono chiusi (unione finita di punti, che sono chiusi per la caratterizzazione (2.141)). Abbiamo quindi che $\pi^{-1}([P])$ è chiuso per ogni $[P] \in X \vee Y$, quindi per definizione di topologia quoziente $\{[P]\}$ stesso è chiuso, dunque $X \vee Y$ è T_1 per (2.141).

Immersioni chiuse) Mostriamo la tesi per i , la dimostrazione per j è del tutto analoga. Sia $C \subseteq X$ chiuso. Osserviamo che

$$\pi^{-1}(i(C)) = \begin{cases} C & \text{se } x_0 \notin C \\ C \cup \{y_0\} & \text{se } x_0 \in C \end{cases},$$

i quali sono entrambi chiusi perché unione di chiusi ($\{y_0\}$ è chiuso perché Y è T_1). Per definizione di topologia quoziente, $i(C)$ è chiuso. \square

Proposizione 2.331 (T_2 passa al bouquet).

Se X e Y sono T_2 , anche $X \vee Y$ è T_2 .

Dimostrazione.

Consideriamo $p \neq q$ in $X \vee Y$. Senza perdita di generalità si presenta uno dei seguenti casi:

$p, q \in i(X) \setminus \{[x_0]\}$)

Poiché X è T_2 esistono aperti disgiunti di X (U e V) che separano p' e q' (dove $p = [p']$ e $q = [q']$). Si ha inoltre che $\{x_0\}$ è chiuso in X ($T_2 \implies T_1$), dunque posso supporre $x_0 \notin U$ e $x_0 \notin V$ (basta intersecare con $X \setminus \{x_0\}$, che è aperto). Dopo questa modifica U e V sono aperti saturi che separano p' e q' , quindi si proiettano in aperti disgiunti che separano p e q .

$p \in i(X) \setminus \{[x_0]\}$, $q \in j(Y) \setminus \{[y_0]\}$)

Gli aperti $X \setminus \{x_0\}$ e $Y \setminus \{y_0\}$ sono saturi, disgiunti e separano p e q .

$p = [x_0] = [y_0]$, $q \in i(X) \setminus \{[x_0]\}$)

Sia $q' \in X$ tale che $q = [q']$. Siano U e V aperti disgiunti di X che separano x_0 e q' . Osserviamo che $U \cup Y$ e V sono aperti saturi disgiunti che separano x_0 e q' , quindi si proiettano come vogliamo. \square

Proposizione 2.332 (Bouquet è compatto se e solo se lo sono i fattori).

$X \vee Y$ è compatto se e solo se X e Y sono compatti.

Dimostrazione.

\Leftarrow) Se X è compatto allora $i(X)$ è compatto per continuità. Similmente $j(Y)$ è compatto. Dato che $X \vee Y = i(X) \cup j(Y)$ abbiamo che il bouquet è unione finita di compatti, quindi è compatto.

\Rightarrow) Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di X . Per ogni $i \in I$ consideriamo

$$U'_i = \begin{cases} U_i & \text{se } x_0 \notin U_i \\ U_i \cup Y & \text{se } x_0 \in U_i \end{cases}$$

Osserviamo che $\{U'_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di aperti saturi di $X \sqcup Y$, che si proietta in un ricoprimento aperto di $X \vee Y$. Per compattezza posso estrarre

un sottoricoprimento finito $\{U'_1, \dots, U'_n\}$ di $X \sqcup Y$, da cui $\{U'_j \cap X\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$ è un ricoprimento finito di X , ma dato che $U'_i \cap X = U_i$ per costruzione abbiamo in realtà costruito un sottoricoprimento finito di X a partire da $\{U_i\}_{i \in I}$. \square

Proposizione 2.333 (Bouquet è connesso se e solo se lo sono i fattori).
 $X \vee Y$ è connesso se e solo se X e Y sono connessi.

Dimostrazione.

\Leftarrow) Dato che X e Y sono connessi si ha che $i(X)$ e $j(Y)$ sono connessi per continuità. Dato che $X \vee Y = i(X) \cup j(Y)$ e $\{[x_0]\} = i(X) \cap j(Y) \neq \emptyset$ si ha che $X \vee Y$ è connesso (2.200).

\Rightarrow) Se, senza perdita di generalità, X fosse sconnesso allora potremmo scrivere $X = A \sqcup B$ con A, B aperti disgiunti non vuoti. Senza perdita di generalità supponiamo $x_0 \in B$ (e quindi $x_0 \notin A$). Osserviamo che $i(A)$ e $i(B) \cup j(Y)$ sono aperti saturi disgiunti non vuoti di $X \sqcup Y$, infatti i è una immersione topologica in $i(X)$, che è aperto, quindi è una mappa aperta (2.115) (la saturazione, disgiunzione e non essere vuoti sono proprietà evidenti). Segue che questi si proiettano ad aperti disgiunti non vuoti di $X \vee Y$, che contraddice l'ipotesi di connessione. \neq \square

2.12 Quozienti per azioni di gruppi

Ricordiamo le seguenti definizioni

Definizione 2.334 (Azione).

Dato un gruppo G e un insieme X , una **azione** di G su X è un omomorfismo $G \rightarrow S(X)$, dove $S(X)$ sono le permutazioni di X . Come notazione scriviamo

$$G \curvearrowright X$$

e indichiamo l'immagine di $x \in X$ tramite la permutazione data da $g \in G$ come

$$g \cdot x = gx = g(x) = \ell_g(x).$$

Definizione 2.335 (Orbita e stabilizzatore).

Data una azione $G \curvearrowright X$ e fissato $x_0 \in X$ definiamo l'**orbita** e lo **stabilizzatore** di x_0 rispettivamente come

$$\text{orb}_G(x_0) = G \cdot x_0 = \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ t.c. } gx_0 = y\}$$

$$\text{stab}_G(x_0) = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}.$$

Definizione 2.336.

Una azione $G \curvearrowright X$ si dice

- **fedele** se $\ell_g = id \iff g = 1_G$,
- **libera** se $\text{stab}(x_0) = \{1_G\}$ per ogni $x_0 \in X$,
- **transitiva** se per ogni $x, y \in X$ esiste $g \in G$ tale che $gx = y$, cioè $G \cdot x_0 = X$ per ogni $x_0 \in X$.

Osservazione 2.337.

Data una azione $G \curvearrowright X$, la relazione

$$x \sim y \iff G \cdot x = G \cdot y \iff \exists g \in G \text{ t.c. } gx = y$$

è di equivalenza. Chiamiamo questa la **relazione indotta** dall'azione.

Le azioni che riguardano il corso saranno solo le

Definizione 2.338 (Azione continua).

Dato un gruppo G e uno spazio topologico X , una azione $G \curvearrowright X$ è detta **continua** se le mappe

$$\ell_g : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & gx \end{array}$$

sono continue per ogni $g \in G$.

Osservazione 2.339.

Dato che $\ell_g^{-1} = \ell_{g^{-1}}$, si ha che in realtà le ℓ_g sono omeomorfismi di X in sé.

Da ora in poi assumeremo che tutte le azioni di un gruppo su uno spazio topologico siano continue.

Notazione 2.340.

Data una azione $G \curvearrowright X$ con X spazio topologico poniamo

$$X/G = X/\sim,$$

dove \sim è la relazione indotta dall'azione.

Osservazione 2.341.

Più propriamente dovremmo scrivere $G \backslash X$ perché stiamo considerando una azione sinistra.

Osservazione 2.342.

Se $G \subseteq X$ (per esempio $X = \mathbb{R}$ e $G = \mathbb{Z}$) si presenta una ambiguità rispetto a quale spazio intendiamo con

$$X/G,$$

più precisamente la relazione per la quale stiamo quozientando potrebbe essere quella indotta dall'azione di G su X , ma anche “ $x = y$ oppure $x, y \in G$ ”. Se non specifichiamo altrimenti o se non chiaro da contesto intenderemo il quoziente per azione.

Osservazione 2.343 (Caratterizzazione dei saturi per azione).

Dato $A \subseteq X$ si ha che se $\pi : X \rightarrow X/G$ è la proiezione allora

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} \{ga \mid a \in A\} = \bigcup_{g \in G} g \cdot A = G \cdot A.$$

Segue che A è saturo se e solo se è G -invariante (dato che le classi sono le orbite).

Proposizione 2.344 (Proiezioni per quozienti per azione).

Data una azione $G \curvearrowright X$, la proiezione $\pi : X \rightarrow X/G$ è una mappa aperta. Inoltre, se G è finito, allora π è anche una mappa chiusa.

Dimostrazione.

*) Sia $A \subseteq X$ aperto. Per definizione di topologia quoziente si ha che $\pi(A)$ è aperto in X/G se e solo se

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} gA$$

è aperto in X , ma ℓ_g è un omeomorfismo, quindi $gA = \ell_g(A)$ è aperto per ogni $g \in G$, quindi $\pi^{-1}(\pi(A))$ è unione di aperti, cioè è aperto.

*) Con un ragionamento analogo troviamo che per C chiuso, $\pi(C)$ è chiuso se e solo se

$$\bigcup_{g \in G} gC$$

è chiuso. Dato che G è finito quella è una unione finita e gli gC sono chiusi per motivi analoghi a prima, dunque abbiamo una unione finita di chiusi, che è chiusa e la tesi segue. \square

Osservazione 2.345.

La proiezione non è sempre chiusa (2.406)

2.12.1 Assiomi di Separazione e Azioni

Osserviamo che se X gode di assiomi di separazione, X/G può perderli quasi senza restrizione (presentiamo due esempi di quozienti di \mathbb{R}^n non T_1 : (2.407) (2.408)).

Cerchiamo di capire quando X/G è T_2 .

Definizione 2.346 (Azioni vaganti, propriamente discontinue e proprie).

Data una azione $G \curvearrowright X$ con X spazio topologico, affermiamo che questa è

- **vagante** se per ogni $x \in X$ esiste U intorno di x tale che

$$\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

- **propriamente discontinua** se per ogni $x \in X$ esiste U intorno di x tale che

$$\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} = \{1_G\}.$$

- **propria** se per ogni compatto $K \subseteq X$ abbiamo che

$$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Osservazione 2.347.

Una azione propriamente discontinua è anche vagante.

Osservazione 2.348.

Osserviamo che

$$\text{stab}_G(x) \subseteq \{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\},$$

dunque in particolare:

- Se una azione è vagante allora gli stabilizzatori sono finiti.
- Se una azione è propriamente discontinua allora è libera.

Teorema 2.349 (Caratterizzazione di azioni propriamente discontinue su T_2).
 Sia X uno spazio T_2 . Si ha che una azione $G \curvearrowright X$ è propriamente discontinua se e solo se è libera e vagante.

Dimostrazione. (data per esercizio).

\implies) Le due implicazioni valgono in generale per la definizione di propriamente discontinua.

\impliedby) Dato $x \in X$, sia U un intorno di x tale che

$$S = \{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Per la finitezza di S sappiamo che $S = \{1_G, g_1, \dots, g_n\}$. Mostriamo che possiamo trovare un U' tale che il nuovo S contiene meno elementi. Reiterando questo procedimento, per il principio del minimo, mostreremo che per un opportuno U si ha $S = \{1_G\}$, cioè l'azione è propriamente discontinua.

Per definizione di azione libera sappiamo che $g_n(x) \neq x$ e per definizione di spazio Hausdorff esistono W, V aperti disgiunti tali che $g_n(x) \in V$ e $x \in W$. Definiamo $U' = g_n^{-1}(g_n U \cap V) \cap W$: questo è ancora un intorno di x (intersezione finita di aperti che contengono x) e

$$S' = \{g \in G \mid gU' \cap U' \neq \emptyset\} \subseteq S,$$

ma osserviamo che $g_n \notin S'$, infatti

$$g_n U' \cap U' \subseteq (g_n U \cap V) \cap (g_n^{-1}(g_n U \cap V) \cap W) \subseteq V \cap W = \emptyset.$$

□

Teorema 2.350 (Caratterizzazione azioni proprie su localmente compatti).

Sia X uno spazio localmente compatto. Si ha che $G \curvearrowright X$ è una azione propria se e solo se per ogni $x, y \in X$ esistono intorni U e V di x e y rispettivamente tali che

$$\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Dimostrazione.

\implies) Dati $x, y \in X$, poiché X è localmente compatto, esistono U, V compatti con U intorno di x e V di y . Sia $K = U \cup V$, il quale è chiaramente compatto. Date le inclusioni $gU \subseteq gK$ e $V \subseteq K$ si ha

$$\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\} \subseteq \{gK \cap K \neq \emptyset\},$$

dunque per la definizione di azione propria, l'insieme di sinistra è sottoinsieme di un insieme finito, quindi è finito come voluto.

\impliedby) Sia K compatto e fissiamo $x_0 \in K$. Preso qualsiasi $y \in K$ esistono U_y intorno di x_0 e V_y intorno di y (supponiamoli aperti senza perdita di generalità) tali che

$$\{g \in G \mid gU_y \cap V_y \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Osserviamo che $\{V_y\}_{y \in K}$ è un ricoprimento aperto di K , esistono dunque per compattezza $y_1, \dots, y_n \in K$ tali che

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

Definiamo $U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, il quale è un aperto contenente x_0 . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \{g \in G \mid gU_{x_0} \cap K \neq \emptyset\} &\subseteq \{g \in G \mid gU_{x_0} \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) \neq \emptyset\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^n \{g \in G \mid gU_{x_0} \cap V_{y_i} \neq \emptyset\} \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n \{g \in G \mid gU_{y_i} \cap V_{y_i} \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

cioè $\{g \in G \mid gU_{x_0} \cap K \neq \emptyset\}$ è contenuto in una unione finita di insiemi finiti, è dunque esso stesso finito.

Osserviamo ora che al variare di $x_0 \in K$, $\{U_{x_0}\}$ è un ricoprimento aperto di K , esistono dunque $x_1, \dots, x_m \in K$ tali che

$$K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}.$$

Per quanto mostrato, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ si ha che

$$\{g \in G \mid gU_{x_i} \cap K \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Sia $g \in G$ tale che $gK \cap K \neq \emptyset$, segue che per qualche $i \in \{1, \dots, m\}$ abbiamo $gU_{x_i} \cap K \neq \emptyset$, e quindi

$$g \in \bigcup_{i=1}^m \{g \in G \mid gU_{x_i} \cap K \neq \emptyset\},$$

il quale è finito perché unione finita di finiti. □

Osservazione 2.351.

Nel teorema l'implicazione \Leftarrow non usa la locale compattezza.

Siamo pronti per dare un criterio che garantisce che un quoziente di azione sia T_2 :

Teorema 2.352 (Criterio sufficiente per quoziente per azione T_2).

Sia X localmente compatto e T_2 . Si ha che se $G \curvearrowright X$ è propria allora X/G è T_2 .

Dimostrazione.

Siano $[x], [y]$ punti distinti di X/G . Per definizione vogliamo mostrare che esistono aperti di X/G che separano i punti. Equivalentemente possiamo cercare due aperti *saturi* disgiunti in X che separino x e y , infatti le immagini di questi aperti sono aperti del quoziente (perché saturi) e continuano ad essere disgiunti (perché altrimenti entrambi intersecherebbero una particolare orbita e contraddiremmo o la disgiunzione o la saturazione).

Poiché l'azione è propria e siamo su un localmente compatto, per il teorema (2.350), esistono intorni (aperti) U e V di x e y rispettivamente tali che

$$\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\} \text{ è finito.}$$

Poiché $[x] \neq [y]$, si ha che per ogni i , $g_i x \neq y$, e siccome X è Hausdorff, possiamo trovare U_i aperto contenente $g_i x$ e V_i aperto contenete y tali che $U_i \cap V_i = \emptyset$.

Definiamo i seguenti intorni di x e y :

$$\hat{U} = U \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1} U_i, \quad \hat{V} = V \cap \bigcap_{i=1}^n V_i,$$

che sono tali perché le mappe ℓ_{g_i} sono continue e intersezioni finite di aperti sono aperti.

Definiamo ora i saturati di questi e speriamo che siano disgiunti:

$$\tilde{U} = G \cdot \hat{U}, \quad \tilde{V} = G \cdot \hat{V}.$$

Ricordiamo che $G\hat{U} = \bigcup_{g \in G} g\hat{U}$, quindi è unione di aperti. Similmente anche \tilde{V} è aperto.

Supponiamo per assurdo che $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, cioè che esistano $h, k \in G$ tali che

$$h\hat{U} \cap k\hat{V} \neq \emptyset \implies k^{-1}h\hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset.$$

Poiché $\hat{U} \subseteq U$ e $\hat{V} \subseteq V$ abbiamo che $k^{-1}h = g_i$ per $i \in \{1, \dots, n\}$, dunque

$$g_i \hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset \implies U_i \cap V_i \neq \emptyset,$$

ma questo è assurdo per costruzione di U_i e V_i . \nexists

□

Osservazione 2.353.

L'unico motivo per cui abbiamo supposto localmente compatto e azione propria è per sfruttare la caratterizzazione data dal teorema (2.350).

2.12.2 Domini fondamentali

Proviamo a trovare dei sottoinsiemi di uno spazio che si proiettano a quoziente come lo spazio intero.

Definizione 2.354 (Dominio fondamentale).

Fissiamo una azione $G \curvearrowright X$. Affermiamo che $D \subseteq X$ è un **dominio fondamentale** di X per l'azione se

1. D è chiuso
2. $G \cdot D = \bigcup_{g \in G} gD = X$ ($\pi|_D$ è surgettiva)
3. la famiglia $\{gD\}_{g \in G}$ è localmente finita
4. Per ogni $g \in G \setminus \{1_G\}$ abbiamo $g\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$ ($\pi|_{\overset{\circ}{D}}$ è iniettiva).

Osservazione 2.355.

L'ultima proprietà viene inserita più che altro per ragioni storiche, nei teoremi successivi non viene usata molto.

La terza proprietà è molto forte, infatti vedremo che non tutte le azioni ammettono dominio fondamentale.

Osservazione 2.356.

In molti casi non solo si ha D chiuso, ma $\overline{\overset{\circ}{D}} = D$. Questo ci permette di pensare ai domini fondamentali come uno spazio la cui parte interna viene lasciata a sé e vengono effettuate delle identificazioni sul bordo.

Lemma 2.357 (Famiglie localmente finite incontrano compatti finite volte).
 Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia localmente finita e K è compatto allora

$$\{i \in I \mid A_i \cap K \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Dimostrazione.

Per ogni $x \in K$ sia U_x un suo intorno aperto tale che

$$\{i \in I \mid A_i \cap U_x \neq \emptyset\}$$

è finito. Chiaramente $\{U_x\}_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto di K . Per compattezza sia $\{U_1, \dots, U_n\}$ un suo sottoricoprimento finito. Concludiamo osservando che

$$\{i \in I \mid A_i \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n \{i \in I \mid A_i \cap U_j \neq \emptyset\}$$

e il secondo termine è unione finita di finiti, quindi l'insieme della tesi è finito. \square

Lemma 2.358 (Azione con dominio fondamentale è propria).
 Se una azione ammette dominio fondamentale allora è propria.

Dimostrazione.

Per definizione $\{gD\}_{g \in G}$ è localmente finita, quindi per il lemma (2.357) abbiamo che

$$\{g \in G \mid gD \cap K \neq \emptyset\} = \Omega \text{ è finita.}$$

Poiché $\{gD\}$ copre X sappiamo anche che

$$K \subseteq \bigcup_{g \in \Omega} gD.$$

Sia $g_0 \in G$ tale che $g_0K \cap K \neq \emptyset$ e mostriamo che ci sono un numero finito di possibilità per g_0 . Osserviamo che

$$g_0K \cap \left(\bigcup_{g \in \Omega} gD \right) \neq \emptyset,$$

e quindi esiste $g_1 \in \Omega$ tale che

$$g_0K \cap g_1D \neq \emptyset,$$

da cui le implicazioni

$$\begin{aligned} g_0K \cap g_1D \neq \emptyset &\implies K \cap (g_0^{-1}g_1)D \neq \emptyset \implies \\ &\implies g_0^{-1}g_1 = g_2 \in \Omega \implies \\ &\implies g_0 = g_1g_2^{-1} \text{ con } g_1, g_2 \in \Omega. \end{aligned}$$

Dato che Ω è finito, si ha che ci sono al massimo $|\Omega|^2$ possibilità per g_0 , da cui la tesi. \square

Teorema 2.359 (Localmente compatto con dominio fondamentale).

Sia X localmente compatto e sia D un dominio fondamentale per $G \curvearrowright X$. Valgono le seguenti:

- se X è T_2 allora X/G è T_2
- $X/G \cong D/\sim$, dove \sim è la relazione indotta da $G \curvearrowright X$ ristretta a D .

Dimostrazione.

*) Per il lemma (2.358) l'azione è propria. La tesi segue applicando il teorema (2.352).

*) Vogliamo mostrare che $D/\sim \cong X/G$. Costruiamo dapprima una mappa $D \rightarrow X/G$ e vediamo come passa al quoziente.

$$D \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/G$$

Osserviamo che $\pi \circ i$ è continua perché composizione di continue ed è surgettiva per la seconda proprietà dei domini fondamentali.

Per definizione di \sim , abbiamo che $\pi \circ i(x) = \pi \circ i(y) \iff x \sim y$, dunque per la proprietà universale della topologia quoziente (2.306) esiste una mappa $f : D/\sim \rightarrow X/G$ continua (e bigettiva per (2.310)) che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} D & \xhookrightarrow{i} & X & \xrightarrow{\pi} & X/G \\ \pi' \downarrow & & & \nearrow f & \\ D/\sim & & & & \end{array}$$

Per concludere dobbiamo mostrare che f è un omeomorfismo. È sufficiente vedere che f è chiusa.

Osserviamo che i chiusi di D/\sim corrispondono ai chiusi saturi di D per la relazione \sim . Se mostriamo che $\pi \circ i$ è chiusa, in particolare avremo mostrato che è chiusa sui saturi e dunque f è chiusa.

Sia $C \subseteq D$ un chiuso di D . Per definizione di dominio fondamentale, D è chiuso e quindi C è chiuso (in X). Per definizione di topologia quoziente vediamo che $\pi \circ i(C) = \pi(C)$ è chiuso se e solo se $\pi^{-1}(\pi(C))$ è chiuso, cioè

$$\bigcup_{g \in G} gC \text{ è chiuso.}$$

Dato che ℓ_g è un omeomorfismo, gC è chiuso e poiché $\{gD\}$ è localmente finito, a maggior ragione $\{gC\}$ è localmente finito. Dato che unione localmente finita di chiusi è chiusa (2.176), $\bigcup_{g \in G} gC$ è chiuso come volevamo. \square

Osservazione 2.360.

Non ha senso dire che la relazione su D che abbiamo considerato è la relazione indotta da $G \curvearrowright D$, perché in generale G non agisce su D , in quanto è possibile che $gD \not\subseteq D$.

Osservazione 2.361.

Trovare domini fondamentali compatti rende la vita più semplice, per esempio garantisce che il quoziente D/\sim sia compatto, dunque una condizione sufficiente per trovare un omeomorfismo dal quoziente a un candidato spazio Z è mostrare che la mappa è continua, bigettiva e che Z è T_2 (vorremmo applicare (2.243)).

2.13 Topologia dei Proiettivi

Ricordiamo che

$$\mathbb{P}^n \mathbb{K} = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim,$$

che possiamo interpretare come quoziente per la seguente azione:

$$\mathbb{K}^\times \curvearrowright \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \lambda \cdot v = \lambda v.$$

Cerchiamo allora di dotare $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ di una topologia quoziente a partire dalla topologia di $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Gli unici campi che considereremo in questo capitolo sono \mathbb{R} e \mathbb{C} dato che conosciamo bene \mathbb{R}^n e possiamo interpretare topologicamente \mathbb{C}^n come \mathbb{R}^{2n} .

2.13.1 Caso Reale

Osserviamo che l'azione in esame non è propria, per esempio perché $1 + \varepsilon$ è arbitrariamente vicino all'identità del gruppo, quindi non posso sperare di separare le orbite. Questo ci leva ogni speranza di trovare un dominio fondamentale (2.358).

Possiamo comunque cercare di restringere la nostra attenzione ad un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, che vedremo essere S^n .

Osservazione 2.362.

S^n contiene un rappresentante per ogni orbita dell'azione, infatti $v \sim \frac{1}{|v|}v \in S^n$.

Osservazione 2.363.

La proiezione ristretta alla sfera non è iniettiva, ma non è lontana: è 2 a 1.

Dimostrazione.

Siano $v, v' \in S^n$ tali che $v \sim v'$. Si ha dunque che $v = \lambda v'$ e passando ai moduli $|\lambda||v| = |v'|$, e dato che i vettori sono sulla sfera

$$|\lambda| = 1 \implies \lambda = \pm 1 \text{ (ricordiamo che } \lambda \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Osserviamo banalmente che se $\lambda = \pm 1$ e $v \in S^n$ allora $v' = \lambda v \in S^n$ quindi la sfera contiene esattamente due rappresentanti per orbita. \square

Date queste proprietà della sfera rispetto alla relazione in esame sospettiamo quanto segue:

Teorema 2.364 (Proiettivi reali come identificazione antipodale di una sfera). *Consideriamo l'azione di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su S^n data da $0 \cdot p = p$, $1 \cdot p = -p$. Si ha che*

$$\mathbb{P}^n \mathbb{R} \cong S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dimostrazione.

Definiamo le seguenti mappe:

$$i: \begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ p & \longmapsto & p \end{array} \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^n \\ v & \longmapsto & \frac{1}{|v|}v \end{array}.$$

Osserviamo che inducono mappe ben definite ai quozienti, infatti la relazione antipodale coincide con l'identificazione per proporzionalità. Più precisamente

sono ben definite e continue per la proprietà universale dei quozienti le mappe α e β del diagramma (completiamo con la proprietà il triangolo rosso e il triangolo blu rispettivamente):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \mathbb{P}^n \mathbb{R} & \\
 & & \alpha \nearrow & \uparrow \pi & \\
 S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xleftarrow{\pi'} & S^n & \xleftarrow{h} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \mathbb{R} \\
 & & \downarrow \pi' & & \searrow \beta \\
 & & S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & &
 \end{array}$$

Osserviamo inoltre insiemisticamente che α e β sono inverse, quindi sono mappe continue con inversa continua, cioè omeomorfismi. \square

Corollario 2.365.

I proiettivi reali sono compatti, connessi per archi e Hausdorff.

Dimostrazione.

S^n è compatto e connesso per archi (se $n \neq 0$, ma in tal caso il proiettivo è un punto e la tesi vale comunque), quindi anche $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ lo è per continuità di π .

Per mostrare che $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ è Hausdorff osserviamo che S^n è localmente compatto e T_2 e che l'azione $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ è propria (banalmente dato che $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è finito), quindi per il teorema (2.352) si ha che $S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è T_2 , e quindi anche $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ lo è in quanto ad esso omeomorfo. \square

Teorema 2.366 (Proiettivi reali come identificazione sul bordo di disco).

Poniamo su D^n la relazione

$$v \sim v' \iff v = v' \text{ oppure } |v| = |v'| = 1 \text{ e } v = -v'.$$

Si ha che $D^n / \sim \cong \mathbb{P}^n \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

L'idea è che siccome la semisfera superiore è un dominio fondamentale per $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ possiamo appiattire questa ad un disco e trovare la tesi.

Sia $H = \{x \in S^n \mid x_0 \geq 0\}$. Questo è un dominio fondamentale per l'azione $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ (indichiamo la restrizione della relazione indotta dall'azione con \sim'):

- Evidentemente chiuso
- $H \cup 1 \cdot H = S^n$ per evidenti motivi geometrici
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è un gruppo finito, quindi $\{gH\}_{g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ è finita, in particolare è localmente finita
- $\overset{\circ}{H} = \{x \in S^n \mid x_0 > 0\}$ e $1 \cdot \overset{\circ}{H} = \{x \in S^n \mid x_0 < 0\}$. Chiaramente questi sono disgiunti.

Consideriamo le mappe

$$\alpha : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & D^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array},$$

$$\beta : \begin{array}{ccc} D^n & \longrightarrow & H \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}, x_1, \dots, x_n) \end{array}.$$

Queste sono evidentemente continue e passano ai quozienti (le uniche identificazioni avvengono al bordo e su questo le relazioni sono moralmente la stessa).

Abbiamo quindi mostrato che

$$D^n / \sim \cong H / \sim' \cong S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{P}^n \mathbb{R}.$$

□

Osservazione 2.367.

Dal teorema (2.366) segue immediatamente che $\mathbb{P}^1 \mathbb{R} \cong S^1$ (e NON nel modo che ci aspetteremmo pensando allo spazio delle direzioni di \mathbb{R}^2).

Dalla seguente successione di trasformazioni possiamo vedere che $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ è omeomorfo ad un nastro di Möbius sul cui bordo è incollato un disco:

- Consideriamo il disco D^2 con la relazione del teorema (2.366)
- Tagliamo un disco più piccolo in modo da ottenere un disco (questo) e una corona.
- Tagliamo la corona secondo quello che sarebbe stato un diametro del disco originale
- Raddrizziamo i due pezzi ricavati dalla corona in due rettangoli
- Identifichiamo i due rettangoli lungo il lato che proveniva dal bordo del disco originale
- Identifichiamo i lati del rettangolo ottenuto al passo precedente corrispondenti ai bordi creati quando abbiamo fatto il taglio lungo il diametro.

Avendo seguito questi passi dovremmo aver ottenuto un nastro di Möbius (dal rettangolo) e un disco (quello tagliato da quello originale) che deve essere attaccato lungo il bordo del nastro di Möbius. Vi chiedo sinceramente scusa perché seguire questi passi anche con un disegno sotto non è semplicissimo, non oso immaginare a parole.

2.13.2 Caso Complesso

Osserviamo nuovamente che l'azione che determina $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ non è propria, ma anche in questo caso si ha che

$$S^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2} \mid |v| = 1\}$$

incontra tutte le classi di equivalenza per la relazione su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ (per trovare un rappresentante sulla sfera basta dividere ogni vettore per la propria norma).

Osservazione 2.368.

Per quanto appena detto, la mappa $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ ristretta a S^{2n+2} è surgettiva (e continua per definizione di topologia quoziente). Osserviamo quindi che $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ è compatto e connesso per archi.

Per studiare meglio i proiettivi osserviamo che grandi pezzi di $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ sono essenzialmente \mathbb{K}^n :

Proposizione 2.369 (Le carte affini sono omeomorfismi).

Se \mathbb{K} è un campo dotato di una topologia (per quanto ci riguarda $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) allora le carte affini

$$J_i : \mathbb{K}^n \rightarrow U_i$$

sono omeomorfismi tra \mathbb{K}^n e particolari aperti di $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$.

Dimostrazione.

Senza perdita di generalità consideriamo solo la prima carta affine, cioè poniamo $i = 0$.

Osserviamo che le carte affini sono continue perché composizione di continue:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \mathbb{K} \\ & & (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (1, x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & [1, x_1, \dots, x_n] \end{array}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(H_0) &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_0 = 0\} = \\ &= \{0\} \times \mathbb{K}^n \setminus \{0\} = (\{0\} \times \mathbb{K}^n) \cap (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

è un chiuso di $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ perché prodotto di chiusi intersecato con $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ (2.124). Per definizione di topologia quoziente abbiamo dunque che H_0 stesso è chiuso da cui $U_0 = \mathbb{P}^n \mathbb{K} \setminus H_0$ è aperto.

Consideriamo ora il sollevamento di U_0 e proviamo a mostrare che l'inversa di J_0 è continua per proprietà universale delle proiezioni.

Sia $W_0 = \pi^{-1}(U_0) \subseteq \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ e consideriamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right). \end{array}$$

Questa è evidentemente continua e passa al quoziente (gli scalari si cancellano nelle frazioni), definiamo dunque una mappa continua

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ [x_0, \dots, x_n] & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right), \end{array}$$

dove stiamo considerando U_0 con la topologia quoziente. Osserviamo che questa mappa è l'inversa della carta affine, quindi se la topologia quoziente e la topologia di sottospazio per U_0 coincidono abbiamo quanto volevamo. Basta notare che gli aperti di U_0 (con topologia di sottospazio) corrispondono esattamente gli aperti saturi in W_0 , quindi quando passiamo a quoziente un aperto per la topologia quoziente di U_0 è effettivamente un aperto come topologia di sottospazio. \square

Proposizione 2.370.

$\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ è Hausdorff con la topologia quoziente.

Dimostrazione.

Consideriamo due punti distinti $x, y \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$. Osserviamo che le proiettività sono omeomorfismi di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ in se stesso:

per definizione, una proiettività è indotta da una mappa lineare invertibile, e ogni tale mappa è un omeomorfismo di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ in se stesso. Infatti le mappe lineari sono continue per la topologia di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ e dal fatto che l'inversa di una lineare è lineare segue che sono omeomorfismi. Osserviamo inoltre che mappe lineari, in quanto omogenee, preservano aperti saturi per la relazione \sim che definisce $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$. Osserviamo dunque che se f è una proiettività indotta dalla mappa lineare φ e $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ è la proiezione al quoziente, abbiamo la seguente catena di equivalenze

$$\begin{aligned} & A \text{ aperto di } \mathbb{P}^n\mathbb{C} \\ & \pi^{-1}(A) \text{ aperto saturo di } \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ & \varphi(\pi^{-1}(A)) \text{ aperto saturo di } \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ & f(A) = \pi(\varphi(\pi^{-1}(A))) \text{ aperto di } \mathbb{P}^n\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi supporre, a meno di proiettività, $x, y \in U_0 \cong \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{P}^n\mathbb{C}$, ma $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ è T_2 , quindi posso trovare due aperti contenuti in $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ disgiunti che separano x e y . \square

Corollario 2.371.

$\mathbb{P}^1\mathbb{C} \cong S^2$.

Dimostrazione.

Sappiamo che $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ è compatto e T_2 , inoltre $\mathbb{P}^1 \setminus H_0 = U_0 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Osserviamo però che $H_0 = \{[0, 1]\}$, in particolare consiste di un punto. Per l'unicità della compattificazione di Alexandroff (2.256) si deve avere che $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ è omeomorfo alla compattificazione di $U_0 \cong \mathbb{R}^2$, cioè a S^2 come sappiamo dallo studio delle proiezioni stereografiche. \square

2.13.3 Varietà topologiche

Definizione 2.372 (Varietà topologica).

Una **varietà topologica** di dimensione n è uno spazio topologico X tale che

- Per ogni $P \in X$ esiste un intorno aperto U di P omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n
- X è T_2
- X è II-numerabile.

Osservazione 2.373.

Se X rispetta la prima proprietà si dice che X è **localmente euclidea**. L'ultima condizione è omessa da alcuni autori.

Osservazione 2.374.

I proiettivi sono varietà topologiche, $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ di dimensione n e $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ di dimensione $2n$.

Proposizione 2.375.

Dato X e dato $P \in X$ le seguenti condizioni su U intorno aperto di P sono equivalenti:

1. U omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n
2. U omeomorfo a \mathbb{R}^n
3. U omeomorfo a $B(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione.

2 \iff 3) Basta notare che $B(0, \varepsilon) \cong \mathbb{R}^n$.

3 \implies 1) Una palla aperta è in particolare un aperto.

1 \implies 3) La restrizione di omeomorfismi ad un aperto continua ad essere un omeomorfismo. Per definizione di topologia euclidea, ogni aperto di \mathbb{R}^n contiene una palla aperta. Restringiamo l'omeomorfismo a questa e per concludere basta comporre con un omeomorfismo che trasla la palla nell'origine e riscalda il raggio. \square

Osservazione 2.376.

Uno spazio localmente euclideo non è necessariamente T_2 (2.409)

2.14 Appendice al capitolo 2

2.14.1 Esempi e controesempi

Come vi sarete resi conto leggendo il capitolo, ci sono molti controesempi a proprietà che uno potrebbe aspettarsi dagli spazi topologici. Seguono i principali esempi e controesempi dati. Ho deciso di raccogliergli in una sezione a parte per non appesantire troppo la lettura del testo principale con innumerevoli dimostrazioni che esulano dai concetti esposti.

Spazi topologici

Esempio 2.377 (Distanze non topologicamente equivalenti).

Le distanze d_1 e d_∞ su $C([0, 1])$ non sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione.

Osservo che $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$ (e quindi $\tau_1 \subseteq \tau_\infty$), infatti

$$M = \|f\|_\infty \implies \|f\|_1 = \int_0^1 |f| dx \leq \int_0^1 M dx = M = \|f\|_\infty,$$

quindi dobbiamo cercare un insieme A che sia aperto per $\|\cdot\|_\infty$ ma non $\|\cdot\|_1$. Proviamo con $A = B_\infty(0, 1)$, cioè le funzioni che si discostano dalla funzione identicamente nulla di al massimo 1. Chiaramente $0 \in B_\infty(0, 1)$, mostriamo allora che $B_1(0, \varepsilon) \not\subseteq A$. Osserviamo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{\varepsilon}x & \text{se } x \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha integrale ε , ma $\|f\|_\infty = 2$, cioè $f \notin B_\infty(0, 1)$. □

Esempio 2.378 (Punto aderente non di accumulazione).

Siano $X = \mathbb{R}$ e $Z = [0, 1) \cup \{2\}$. Osserviamo che 2 è aderente ma non di accumulazione. Sempre da questo esempio notiamo che 1 è un punto di accumulazione che non appartiene a Z .

Assiomi di numerabilità

Esempio 2.379 (Insieme I -numerabile ma non II -numerabile).

Sia X un insieme più che numerabile dotato della topologia discreta. Esso è chiaramente I -numerabile in quanto metrizzabile e un SFI per x_0 è $\{x_0\}$. Osserviamo però che lo spazio non è secondo numerabile perché ogni base deve contenere i singoletti (aperti scrivibili solo come unione di se stessi ed eventualmente \emptyset) e ce ne sono di una quantità più che numerabile.

Prodotti

Esempio 2.380 (Prodotto di I -numerabili non I -numerabile).

Sia I tale che $|I| > |\mathbb{N}|$ e per ogni $i \in I$ sia $X_i = \{0, 1\}$ con la topologia discreta. Si ha che $X = \prod_{i \in I} X_i$ non è I -numerabile.

Dimostrazione.

Consideriamo $x \in X$ tale che $\pi_i(x) = 0$ per ogni $i \in I$. Vogliamo mostrare che x non ammette SFI numerabile. Sia per assurdo $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un tale sistema di intorni. Senza perdita di generalità supponiamo che U_n sia un aperto di base per ogni $n \in \mathbb{N}$, tanto sicuramente contiene un aperto di base e rimpiazzare U_i con questo restituisce un altro sistema fondamentale di intorni numerabile.

Per definizione della topologia prodotto sappiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(U_n) \neq \{0, 1\}\}$$

è finito. Si ha dunque che $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ è un insieme al più numerabile di indici.

Dato che per ipotesi I è più che numerabile, $I \setminus A \neq \emptyset$, esiste dunque $i_0 \in I \setminus A$. Consideriamo il seguente aperto di base:

$$V = \prod_{i \in I} V_i \quad \text{dove } V_i = \begin{cases} \{0, 1\} & \text{se } i \neq i_0 \\ \{0\} & \text{se } i = i_0 \end{cases}.$$

Osserviamo che $x \in V$, quindi V è un intorno di x .

Per costruzione $\pi_{i_0}(U_n) = \{0, 1\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $U_n \not\subseteq V$. Abbiamo quindi trovato un intorno che non contiene alcun aperto del nostro SFI, che è assurdo. \neq □

Osservazione 2.381.

L'esempio precedente mostra anche che il prodotto più che numerabile di spazi metrizzabili può non essere metrizzabile.

Esempio 2.382 (Le proiezioni non sono sempre chiuse).

Consideriamo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$: esso è preimmagine di 1 tramite la mappa continua $(x, y) \mapsto xy$, quindi è un chiuso in quanto preimmagine di un chiuso tramite una mappa continua, eppure $\pi_1(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è chiuso in \mathbb{R} .

Assiomi di separazione

Proposizione 2.383.

Le implicazioni $T_2 \implies T_1 \implies T_0$ sono strette.

Dimostrazione.

$T_1 \not\Rightarrow T_2$) Consideriamo X infinito con la topologia cofinita. Non è T_2 perché due aperti non vuoti si intersecano sempre. È però T_1 , infatti dati $x \neq y$ in X posso considerare $U = X \setminus \{y\}$ e $V = X \setminus \{x\}$, che sono aperti.

$T_0 \not\Rightarrow T_1$) Consideriamo $X = \mathbb{R}$ con la **topologia semicontinuità inferiore** (gli aperti sono $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$ oltre che a \emptyset e \mathbb{R}). Esso è T_0 , infatti dati $x \neq y$ in \mathbb{R} , $U = (\frac{x+y}{2}, +\infty)$ contiene il maggiore tra x e y ma non l'altro. Ma lo spazio non è T_1 perché dati $x \neq y$ in \mathbb{R} , se $x < y$ ogni aperto che contiene x contiene anche y . □

Esempio 2.384 (Spazio T_4 non T_0).

La topologia indiscreta su X di cardinalità almeno 2 rende lo spazio vuotamente sia T_3 che T_4 , ma come sappiamo questo tipo di spazio non è T_0

Definizione 2.385 (Retta di Sorgenfrey).

La **retta di Sorgenfrey** è \mathbb{R} dotato della topologia con la seguente base:

$$\{[a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Osservazione 2.386.

La topologia di Sorgenfrey è più fine della topologia euclidea, infatti posso scrivere $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ come unione di aperti di Sorgenfrey come segue: sia $x_n \rightarrow a - \varepsilon$ una successione monotona contenuta in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Segue che

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \bigcup_i [x_i, a + \varepsilon).$$

Esempio 2.387.

La retta di Sorgenfrey è normale.

Dimostrazione.

Poiché la topologia è più fine di quella euclidea, la retta di Sorgenfrey è T_1 . Basta allora mostrare che è T_4 .

Siano C, D chiusi disgiunti per la topologia di Sorgenfrey. Per ogni $c \in C$, siccome $c \notin D$ e $\mathbb{R} \setminus D$ è aperto, esiste $[a, b)$ aperto di base di Sorgenfrey tale che $c \in [a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$, cioè $c \in [a, b)$ e $[a, b) \cap D = \emptyset$.

Dato che $c \in [a, b)$, segue chiaramente che $c \in [c, b)$ con $[c, b) \cap D = \emptyset$. Evidenziamo la dipendenza di b da c scrivendo $b = b_c$. Al variare di $c \in C$ costruiamo $[c, b_c)$ aperti tali che $[c, b_c) \cap D = \emptyset$. Sia

$$\Omega_1 = \bigcup_{c \in C} [c, b_c).$$

Per costruzione $\Omega_1 \cap D = \emptyset$.

In modo analogo costruiamo $\Omega_2 = \bigcup_{d \in D} [d, b_d)$ con $D \subseteq \Omega_2$ e $\Omega_2 \cap C = \emptyset$.

Per costruzione Ω_1, Ω_2 sono aperti e $C \subseteq \Omega_1, D \subseteq \Omega_2$. Per concludere basta mostrare che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Supponiamo per assurdo che $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. In tal caso, per costruzione, esistono $c \in C$ e $d \in D$ tali che

$$[c, b_c) \cap [d, b_d) \neq \emptyset,$$

ma in tal caso l'intersezione contiene c o d , che è assurdo per costruzione. $\nexists \quad \square$

Lemma 2.388.

Sia Z uno spazio T_4 e separabile. Se D è un suo sottoinsieme chiuso e discreto allora $|D| < |\mathbb{R}|$.

Dimostrazione.

Sia $W \subseteq Z$ un denso numerabile. Osserviamo che se riusciamo a costruire una funzione

$$\psi : \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathcal{P}(W)$$

iniettiva allora abbiamo finito, infatti in tal caso

$$|D| < |\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(W)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|.$$

Definizione) Dato $C \subseteq D$ osserviamo che C e $D \setminus C$ sono chiusi in D (in quanto \overline{D} discreto), dunque, essendo D chiuso, sono chiusi anche in Z . Per ipotesi Z è T_4 , quindi esistono A_C, B_C aperti disgiunti tali che

$$C \subseteq A_C \quad D \setminus C \subseteq B_C.$$

Pongo $\psi(C) = A_C \cap W$.

Iniettività) Siano $C, C' \subseteq D$ distinti. Allora $C \setminus C' \neq \emptyset$ o $C' \setminus C \neq \emptyset$. Supponiamo senza perdita di generalità $C \setminus C' \neq \emptyset$, cioè esiste $c \in C \cap (D \setminus C')$.

Per costruzione $c \in A_C \cap B_{C'}$, che è un aperto di Z non vuoto. Dato che W è denso osserviamo che $W \cap A_C \cap B_{C'} \neq \emptyset$, dunque

$$\emptyset \neq W \cap A_C \cap B_{C'} \subseteq W \cap A_C = \psi(C),$$

mentre

$$(W \cap A_C \cap B_{C'}) \cap \psi(C') = W \cap A_C \cap \underbrace{B_{C'} \cap A_{C'}}_{=\emptyset} \cap W = \emptyset.$$

Abbiamo quindi mostrato che $W \cap A_C \cap B_{C'}$ è un sottoinsieme non vuoto di $\psi(C)$ disgiunto da $\psi(C')$, in particolare $\psi(C) \neq \psi(C')$. \square

Esempio 2.389 (Piano di Sorgenfrey).

Il piano di Sorgenfrey, cioè il prodotto di due rette di Sorgenfrey, non è T_4 .

Dimostrazione.

Osserviamo che \mathbb{Q} è denso nella retta di Sorgenfrey, quindi \mathbb{Q}^2 è denso nel piano di Sorgenfrey, in particolare il piano di Sorgenfrey è separabile. Per mostrare che non è T_4 basta esibire un sottoinsieme discreto, chiuso e con cardinalità del continuo (lemma 2.388). Consideriamo $D = \{(x, -x)\}$. Chiaramente $|D| = |\mathbb{R}|$ ed è un chiuso perché è un chiuso euclideo. E anche discreto, infatti preso $(x_0, -x_0) \in D$ posso considerare l'aperto $U = [x_0, +\infty) \times [-x_0, +\infty)$, che interseca D solo in quel punto, cioè $\{(x_0, -x_0)\}$ è aperto in D . \square

Esempio 2.390 (Spazio Hausdorff non regolare).

Consideriamo \mathbb{R} dotato della topologia generata dagli aperti euclidei e $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Dimostrazione.

In quanto raffinamento della topologia euclidea, questo spazio è T_2 , dobbiamo quindi mostrare che non è T_3 . Sia $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, il quale è chiuso per costruzione.

Osserviamo che una base della topologia in questione è data da

$$\{A \mid A \text{ aperto euclideo}\} \cup \{A \setminus C \mid A \text{ aperto euclideo}\},$$

infatti prendere intersezione finite di aperti euclidei e potenzialmente $\mathbb{R} \setminus C$ restituisce insiemi come sopra.

Da quanto detto segue che se B è un aperto tale che $0 \in B$ allora $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C \subseteq B$. Sia ora A un aperto che contiene C . Se $\frac{1}{n} < \varepsilon$, siccome $\frac{1}{n} \in C \subseteq A$, A contiene un aperto di base della forma $(\frac{1}{n} - \varepsilon', \frac{1}{n} + \varepsilon') = I$. Osserviamo ora che $I \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C \neq \emptyset$ in quanto per costruzione $\frac{1}{n} < \varepsilon$ e quindi $\frac{1}{n} - \varepsilon' < \frac{1}{n} < \varepsilon$ ma

$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \varepsilon'$, cioè $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (\frac{1}{n} - \varepsilon', \frac{1}{n} + \varepsilon') \neq \emptyset$, ma questo insieme è più che numerabile quindi anche sottraendo C si mantiene una intersezione non vuota.

Abbiamo dunque mostrato che se $A \supset C$ e $0 \in B$ si avrà necessariamente che $A \cap B \subseteq I \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C \neq \emptyset$, cioè il nostro spazio non è T_3 perché non riesce a separare il punto 0 dal chiuso C con aperti disgiunti. \square

Ricoprimenti

Esempio 2.391 (Ricoprimento chiuso non fondamentale).

Su \mathbb{R} il ricoprimento $\{\{x\}\}_{x \in \mathbb{R}}$ non è fondamentale.

Connessi

Esempio 2.392 (Connesso ma non connesso per archi).

L'insieme $Y = \{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è connesso ma non connesso per archi

Dimostrazione.

Sia $Z = \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Osserviamo che Z è connesso per archi in quanto immagine di $(0, +\infty)$ tramite $x \mapsto (x, \sin(1/x))$, che è continua. In particolare Z è connesso. Consideriamo ora $Y = Z \cup \{(0, 0)\}$. Chiaramente $(0, 0) \in \overline{Z}$, per esempio perché limite della successione a valori in Z data da

$$\{(1/(2\pi k), \sin(2\pi k))\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Per la proposizione (2.194) Y è connesso, vogliamo ora mostrare che Y non è connesso per archi. Arriveremo a mostrare che se $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ è continua e $\gamma(0) = (0, 0)$ allora γ è costante, in particolare non esiste un cammino che congiunge $(0, 0)$ con gli altri punti di Y .

Per mostrare quanto sopra basta vedere che $\gamma^{-1}((0, 0)) \subseteq [0, 1]$ è sia aperto che chiuso (e chiaramente non vuoto), da cui per la connessione di $[0, 1]$ ricaviamo che $\gamma^{-1}((0, 0)) = [0, 1]$, ovvero γ è costante.

Poiché $Y \subseteq \mathbb{R}^2$, Y eredita la proprietà T_1 , quindi $(0, 0)$ è un chiuso di Y , da cui $\gamma^{-1}((0, 0))$ è chiuso in $[0, 1]$. Mostriamo ora che è effettivamente aperto. Sia $t_0 \in [0, 1]$ tale che $\gamma(t_0) = (0, 0)$ (cioè $t_0 \in \gamma^{-1}((0, 0))$). Per continuità di γ (e quindi di $\pi_2 \circ \gamma : t \rightarrow \sin(1/t)$) esiste un intorno U di t_0 in $[0, 1]$ tale che

$$|\pi_2(\gamma(t))| < \frac{1}{2}$$

per ogni $t \in U$ (cioè $\pi_2(\gamma(U)) \subseteq B(0, \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R}$). Affermo che $\gamma(U) = \{(0, 0)\}$, che conclude la dimostrazione in quanto $U \subseteq \gamma^{-1}((0, 0))$ e quindi $\gamma^{-1}((0, 0))$ sarebbe intorno di ogni suo punto.

Per assurdo supponiamo che esista $t_1 \in U$ tale che $\gamma(t_1) \neq (0, 0)$. In particolare $\pi_1(\gamma(t_1)) \neq 0$. Poiché $\pi_1 \circ \gamma$ è continua $\pi_1 \circ \gamma([t_0, t_1])$ (se $t_0 < t_1$, altrimenti prendiamo $\pi_1 \circ \gamma([t_1, t_0])$) è connesso, in quanto immagine di connesso tramite una continua. Essendo i connessi di \mathbb{R} intervalli (2.193)

$$\{0\} \neq [0, \pi_1(\gamma(t_1))] \subseteq \pi_1 \circ \gamma([t_0, t_1]),$$

ma in un tale intervallo esistono infiniti punti della forma $(1/(\pi/2 + 2k\pi), 1) \notin \pi_2^{-1}(B(0, \frac{1}{2}))$. Dato che $[t_0, t_1] \subseteq U$ e $\pi_1(\gamma([t_0, t_1])) \supseteq [0, \pi_1(\gamma(t_1))]$ esiste $t_2 \in [t_0, t_1] \subseteq U$ tale che $\pi_2(\gamma(t_2)) = 1$, che è assurdo perché avevamo supposto $|\pi_2(\gamma(t))| < 1/2$ per ogni $t \in U$. $\not\equiv$ \square

Esempio 2.393 (Pettine infinito).

Sia $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Dotato della topologia di sottospazio di \mathbb{R}^2 , X è uno spazio connesso per archi ma non localmente connesso per archi.

Dimostrazione.

Dati due punti (a, b) e (c, d) qualsiasi del pettine un cammino che li congiunge è la composizione seguente composizione:

$$((a, b) \rightarrow (a, 0)) * ((a, 0) \rightarrow (c, 0)) * ((c, 0) \rightarrow (c, d))$$

dove con la notazione $P \rightarrow Q$ intendiamo il cammino

$$(P \rightarrow Q)(t) = tQ + (1 - t)P.$$

Questo mostra che X connesso per archi.

Consideriamo ora un punto di $X \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. Per un raggio abbastanza piccolo troviamo una palla centrata in questo punto che non incontra $\mathbb{R} \times \{0\}$. Senza perdita di generalità consideriamo $(0, 1)$ e $B((0, 1), \frac{1}{2}) \cap X$.

Se $\{U_i\}$ è un sistema fondamentale di intorno sappiamo che esiste i tale che $U_i \subseteq B((0, 1), \frac{1}{2})$, da cui $U_i \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$. Mostriamo che U_i è sconnesso, in particolare non potrà essere connesso per archi.

Osserviamo che se $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap \pi_1(U_i)$ allora preso $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $q_1 < \alpha < q_2$, si ha che $U_i \cap \{x < \alpha\}$ e $U_i \cap \{x > \alpha\}$ sono aperti disgiunti non vuoti di U_i che lo coprono: le prime tre condizioni sono evidenti per costruzione, quindi dobbiamo solo mostrare che coprono. Gli unici punti che possono mancare sono quelli di $\{x = \alpha\} \cap U_i$, ma questo insieme è vuoto per definizione di X e per il fatto che $U_i \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$. \square

Esempio 2.394 (Insieme con parti connesse non aperte).

\mathbb{Q} è totalmente sconnesso ma i singoletti non sono aperti.

Dimostrazione.

Osserviamo che i singoletti non sono aperti, infatti un aperto di \mathbb{Q} è l'intersezione di \mathbb{Q} e un aperto di \mathbb{R} e ogni aperto di \mathbb{R} (eccetto \emptyset) contiene infiniti punti di \mathbb{Q} .

Basta dunque mostrare che $C(q) = \{q\}$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$. Fissiamo dunque $q \in \mathbb{Q}$ e consideriamo C connesso in \mathbb{Q} che contiene q . Osserviamo che la mappa di inclusione $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, quindi C deve essere un connesso di \mathbb{R} interamente contenuto in \mathbb{Q} . Sappiamo che i connessi di \mathbb{R} sono intervalli (2.193), dunque l'unica possibilità affinché $C \subseteq \mathbb{Q}$ è che C sia un punto, cioè $C = \{q\}$ come volevasi dimostrare. \square

Esempio 2.395 (Insieme con parti conn. per archi né aperte né chiuse).

$Y = \{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin(1/x) \mid x > 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sappiamo che i due pezzi specificati sono connessi per archi ma l'insieme non è connesso per archi, dunque questa è la partizione. Osserviamo che $\{(0, 0)\}$ non è aperto e $\{(x, \sin(1/x) \mid x > 0)\}$ non è chiuso.

Compattezza

Esempio 2.396 (\mathbb{R}^n non è compatto).

\mathbb{R}^n non è compatto, infatti il ricoprimento $\{B(x_0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ non ammette un sottoricoprimento finito (se m fosse il massimo raggio allora tutti gli elementi fuori da $B(x_0, m)$ non sarebbero coperti).

Esempio 2.397 (Famiglie che godono della proprietà dell'intersezione finita). Se $X = \mathbb{R}$ gli insiemi della forma $[n, +\infty)$ godono della proprietà dell'intersezione finita. Similmente per $X = [0, 1]$ e gli insiemi della forma $(0, \frac{1}{n})$. Inoltre in entrambi i casi l'intersezione di tutti i termini è vuota.

Esempio 2.398 (Sottoinsiemi compatti non sono necessariamente chiusi). Si consideri $\{1, 2\}$ con la topologia $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$. Chiaramente $\{1\}$ è un sottospazio compatto ma non è un chiuso.

Un esempio meno particolare è dato dalla topologia cofinita su \mathbb{N} , infatti anche in questo spazio ogni sottoinsieme è compatto. Infatti se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto, osservo che $|A \setminus U_i| \in \mathbb{N}$ per ogni i , dunque fissato un primo insieme bastano finiti altri per finire di coprire A .

Esempio 2.399 (Spazio compatto ma non compatto per successioni). Lo spazio $X = [0, 1]^{[0,1]}$ con la topologia della convergenza puntuale è compatto ma non compatto per successioni.

Dimostrazione.

È banalmente compatto per il teorema di Tychonoff (2.248), cerchiamo di costruire una successione senza sottosuccessioni convergenti.

Consideriamo la seguente successione di funzioni:

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & ([10^n x] - 10[10^{n-1}x])/10 \end{array} ,$$

cioè $f_n(x)$ è l' n -esima cifra dello sviluppo decimale di x divisa per 10.

Mostriamo che per ogni sottosuccessione f_{n_k} possiamo trovare $x \in [0, 1]$ tale che $f_{n_k}(x)$ non abbia limite. Scegliamo x in modo che la sua n_k -esima cifra decimale sia $k \pmod{10}$, cioè poniamo che $f_{n_k}(x)$ segua il ciclo

$$0.1 \rightarrow 0.2 \rightarrow 0.3 \rightarrow \dots \rightarrow 0.8 \rightarrow 0.9 \rightarrow 0 \rightarrow 0.1 \rightarrow \dots$$

Chiaramente per un tale x , $f_{n_k}(x)$ non converge. Osserviamo che un x che rispetta le proprietà richieste è

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \pmod{10}}{10^{n_k}} .$$

□

Esempio 2.400 (Spazio compatto per successioni ma non compatto). Sia $X = [0, 1]^{[0,1]}$ e per ogni $f \in X$ sia $\text{supp}(f) = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq 0\}$ il supporto di f . Poniamo

$$Y = \{f \in X \mid \text{supp}(f) \text{ è al più numerabile}\} .$$

Si ha che Y è compatto per successioni ma non compatto con la topologia di sottospazio.

Dimostrazione.

Organizziamo la dimostrazione nei seguenti passi:

Y è denso in X Osserviamo che Y è denso in X , infatti se $U = \prod_{x \in [0,1]} U_x$ è

un aperto di base che contiene $f \in X$, sappiamo per definizione di topologia prodotto che $U_x \neq [0, 1]$ solo per un numero finito di indici. Sia allora

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } U_x = [0, 1] \\ f(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per costruzione $f' \in U$ e ha supporto finito (in particolare al più numerabile), quindi $f' \in U \cap Y \neq \emptyset$, quindi $\forall f \in X$ si ha che $f \in \overline{Y}$, cioè Y è denso in X .

Y non è compatto) In quanto prodotto di spazi T_2 , X è uno spazio T_2 . Osserviamo che $Y \neq X$, in quanto per esempio la funzione $f(x) = 1$ appartiene a X ma non ad Y . Segue che Y è un insieme non chiuso in uno spazio Hausdorff, quindi non può essere compatto (proposizione 2.239).

Y è compatto per successioni) Sia f_n una successione in Y . Osserviamo preliminarmente che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp}(f_n)$ è al più numerabile in quanto unione numerabile di insiemi al più numerabili. Possiamo quindi scrivere i punti dell'unione dei supporti come $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Se riusciamo a trovare una sottosuccessione di f_n tale che $f_{n_k}(x_i)$ converge per ogni i allora avremo trovato una sottosuccessione convergente, dato che per ogni altro punto del dominio tutte le f_n sono nulle⁵.

Costruiamo f_{n_k} per induzione su i l'indice dei punti dell'unione dei supporti: $i = 1$) Osserviamo che $f_n(x_1)$ è una successione in $[0, 1]$, che è compatto per successioni, quindi esiste una sottosuccessione $f_{n_{k,1}}(x_1)$ convergente. Poniamo infine $f_{n_1} = f_{n_{1,1}}$.

$i > 1$) Osserviamo che $f_{n_{k,i-1}}(x_i)$ è una successione in $[0, 1]$, quindi possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $f_{n_{k,i}}(x_i)$. Definiamo $f_{n_i} = f_{n_{i,i}}$.

Osserviamo che per ogni $i \in \mathbb{N}$, $f_{n_k}(x_i)$ è definitivamente una sottosuccessione di $f_{n_{k,i}}(x_i)$, quindi converge. Mettendo tutto insieme abbiamo mostrato che $f_{n_k}(x)$ converge per ogni $x \in [0, 1]$ (se $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$ allora $f_{n_k}(x) = 0$), cioè f_{n_k} converge in X . Sia f il suo limite. Osserviamo che $\text{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$, in particolare è al più numerabile, dunque $f \in Y$ e questo conclude. \square

Esempio 2.401 (Spazio limitato, completo ma non compatto).

Sia X un insieme infinito dotato della distanza discreta. Questo è uno spazio metrico limitato e completo ma non compatto.

Dimostrazione.

Limitato) La distanza discreta ricordiamo è definita come

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

ne segue che X è limitato (ha diametro 1).

Completo) Se x_n è una successione di Cauchy in questo spazio, scegliendo $\varepsilon < 1$, troviamo che

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon < 1 \implies d(x_n, x_m) = 0 \implies x_n = x_m$$

quindi le successioni di Cauchy in questo spazio sono definitivamente costanti, in particolare convergono.

⁵Il procedimento adottato per trovare questa sottosuccessione è molto simile a quello usato nel Teorema di Ascoli Arzelà (vedi Analisi 2)

Non compatto) Consideriamo ora il ricoprimento $\{B(x, \frac{1}{2})\}_{x \in X}$, il quale, per come è fatta la distanza, è il ricoprimento dato dai singoletti. Dato che X è infinito, non possiamo estrarre un sottoricoprimento finito perché dobbiamo includere ogni singoletto per coprire. \square

Esempio 2.402 (Ricoprimento senza numero di Lebesgue).

Consideriamo $X = \mathbb{R}$ e $\Omega = \{B(x, \frac{1}{x^2+1}) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Chiaramente Ω è un ricoprimento aperto di X perché ho una palla per ogni punto, ma per $|x| \rightarrow \infty$ si ha che il raggio delle palle diminuisce quindi se ε fosse un ipotetico numero di Lebesgue possiamo trovare un elemento del ricoprimento che non contiene alcuna palla di raggio ε spostandoci abbastanza.

Esempio 2.403 (Funzione continua non estendibile alla chiusura del dominio).

Siano $X = Y = \mathbb{R}$, $A = (0, +\infty)$ e $f(x) = \frac{1}{x}$. Osserviamo che non possiamo estendere f a $[0, +\infty)$ in modo continuo, infatti porre $f(0) \in \mathbb{R}$ creerebbe una discontinuità in 0.

Esempio 2.404 (Funzione continua ma non uniformemente continua).

Sia $X = (0, +\infty)$ e definiamo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. Affermiamo che f è continua ma non uniformemente continua.

Dimostrazione.

È evidentemente continua.

Osserviamo che

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y|,$$

quindi

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff |x - y| < \frac{\varepsilon}{x + y}.$$

Supponiamo che δ sia una valida costante per la continuità uniforme e consideriamo $y = x + \frac{\delta}{2}$. Chiaramente

$$|y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

ma osserviamo che per $x \rightarrow \infty$ si ha che $\frac{\varepsilon}{x+y} = \frac{\varepsilon}{2x+\delta/2} \rightarrow 0$, in particolare esiste x tale che $\frac{\varepsilon}{x+y} < \frac{\delta}{2}$. Se f fosse uniformemente continua dovremmo avere

$$\frac{\delta}{2} = |y - x| < \frac{\varepsilon}{x + y} < \frac{\delta}{2},$$

che è assurdo. $\not\equiv$

\square

Quozienti

Esempio 2.405 (Identificazione né aperta né chiusa).

Sia $X = \{(x, y) \mid x \geq 0\} \cup \{(x, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e consideriamo la mappa

$$\pi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}.$$

Osservo che π non è né aperta né chiusa, per esempio $B((0, 1), \frac{1}{2})$ è aperto in X ma la sua immagine tramite π è $[0, \frac{1}{2})$ che non è aperto. Similmente l'immagine di $\{(x, y) \mid xy = 1\}$, che è un chiuso, è $(0, +\infty)$ che non è chiusa.

Ma π è una identificazione: è chiaramente surgettiva e in quanto restrizione di una proiezione di $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che π è continua. Se $C \subseteq \mathbb{R}$ è tale che $\pi^{-1}(C)$ è chiuso in X osserviamo che C è chiuso per successione, che in uno spazio metrico è equivalente ad essere chiuso. Infatti se $\{x_n\}$ è una successione a valori in C convergente in \mathbb{R} ($x_n \rightarrow \bar{x}$) considero $(x_n, 0) \in \pi^{-1}(C)$. Dato che $\pi^{-1}(C)$ è chiuso e $(x_n, 0) \rightarrow (\bar{x}, 0)$ si deve avere che $(\bar{x}, 0) \in \pi^{-1}(C)$ e quindi $\bar{x} \in C$.

Esempio 2.406 (Proiezione a quoziente per azione non chiusa).
Considerando l'azione $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ data dalla traslazione si ha che

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

non è una mappa chiusa.

Dimostrazione.

Consideriamo la successione $x_n = n + 2^{-n}$. Osserviamo che $\{x_n\}$ è chiuso come sottoinsieme di \mathbb{R} (sono tutti punti isolati), ma $\{[x_n]\}$ non è chiuso in \mathbb{R}/\mathbb{Z} , infatti

$$\pi(x_n) = \pi(n + 2^{-n}) = \pi(2^{-n})$$

e per continuità di π si ha che $2^{-n} \rightarrow 0$ implica $\pi(2^{-n}) \rightarrow \pi(0)$, eppure $\pi(0) \neq \pi(x_n)$ per ogni n , quindi abbiamo trovato un punto di accumulazione che non appartiene al supporto di $\pi(x_n)$ e per l'inclusione della chiusura per successione nella chiusura (2.99) si ha che $\pi(0) \in \overline{\{\pi(x_n)\}} \setminus \{\pi(x_n)\}$. \square

Esempio 2.407 (\mathbb{R} quoziente \mathbb{Q}).

Consideriamo l'azione $\mathbb{Q} \curvearrowright \mathbb{R}$ di traslazione. Si ha che \mathbb{R}/\mathbb{Q} non è T_1 .

Dimostrazione.

Per la caratterizzazione (2.141) basta mostrare che per $[x_0] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ si ha $\pi^{-1}([x_0])$ non chiuso in \mathbb{R} . Infatti $\pi^{-1}([x_0]) = x_0 + \mathbb{Q}$, che è denso in \mathbb{R} ma diverso da \mathbb{R} stesso. In particolare non è chiuso. \square

Esempio 2.408 ($M(2, \mathbb{R})$ quoziente similitudine).

Consideriamo lo spazio delle matrici $X = M(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ e definiamo l'azione di $GL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright X$ come

$$\ell_P(A) = PAP^{-1}.$$

Si ha che $X/GL(2, \mathbb{R})$ non è T_1 .

Dimostrazione.

Consideriamo la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Osserviamo che nella sua orbita per l'azione troviamo $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (coniugando per $\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} \end{pmatrix}$) per ogni $\varepsilon \neq 0$, ma non $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (coniugare non cambia il rango).

Dato che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è un punto di accumulazione per l'insieme $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha che l'orbita non può essere chiusa, dunque per (2.141) lo spazio non è T_1 . \square

Esempio 2.409 (Spazio localmente euclideo ma non T_2).

Lo spazio quoziente definito da $X = \mathbb{R} \times \{1, -1\}$ con la relazione $(x, \varepsilon) \sim (y, \varepsilon') \iff x = y \neq 0$ oppure $(x, \varepsilon) = (y, \varepsilon')$, è localmente euclideo ma non T_2 . Questo spazio si chiama **retta con due origini**.

Dimostrazione.

Sia Y lo spazio quoziente. Affermiamo che

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & [x, 1] \end{array}$$

è una immersione topologica. Siccome è continua (composizione di continue) basta esibire $J : Y \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $J \circ i = id_{\mathbb{R}}$, e una tale J si può definire come segue:

$$J : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [x, \varepsilon] & \longmapsto & x \end{array} .$$

Questo mostra che ogni punto di $i(\mathbb{R}) = Y \setminus \{[0, -1]\}$ è contenuto in un insieme omeomorfo a \mathbb{R} (questo è $i(\mathbb{R})$). Per coprire $[0, -1]$ basta costruire $i'(x) = [x, -1]$ in modo analogo a i .

Affermiamo che $Y \setminus \{[0, -1]\}$ (e simmetricamente $Y \setminus \{[0, 1]\}$) è aperto e localmente \mathbb{R} , infatti sappiamo che $\{[0, -1]\}$ è chiuso in quanto la sua saturazione/preimmagine è un chiuso ($\{(0, -1)\} \subseteq \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$).

Mostriamo ora che Y non è T_2 . Siano U_1 e U_{-1} intorno aperti di $[(0, 1)]$ e $[(0, -1)]$ rispettivamente. Per definizione di topologia quoziente $V_1 = \pi^{-1}(U_1)$ e $V_{-1} = \pi^{-1}(U_{-1})$ sono aperti saturi di $\mathbb{R} \times \{\pm 1\}$ che contengono $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Per come è fatta la topologia di $\mathbb{R} \times \{\pm 1\}$ sappiamo che esistono $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ tali che $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\} \subseteq V_1$ e $(-\varepsilon', \varepsilon') \times \{-1\} \subseteq V_{-1}$, ma allora U_1 e U_{-1} si intersecano, per esempio in $[(\min\{\varepsilon, \varepsilon'\}, 1)] = [(\min\{\varepsilon, \varepsilon'\}, -1)]$. \square

Capitolo 3

Teoria dell'omotopia e Rivestimenti

Avendo definito diverse nozioni basilari di topologia possiamo cominciare a porci seriamente il problema di classificare spazi a meno di omeomorfismo. Purtroppo capire se spazi diversi sono o meno omeomorfi è molto difficile in generale. In questo capitolo definiamo una teoria che ci aiuterà in alcuni casi a distinguere spazi non omeomorfi: la teoria dell'omotopia.

Vedremo che spazi omotopicamente equivalenti sono omeomorfi, quindi se riusciamo a mostrare che spazi non sono omotopicamente equivalenti avremo mostrato che non sono omeomorfi. L'idea dell'omotopia è quella di una deformazione continua *nel tempo* (vedremo il significato rigoroso in seguito). La relazione di equivalenza omotopica è molto più lasca di quella di omeomorfismo e questo ci permette di estrarre proprietà più grezze e (di solito) più facilmente calcolabili.

Uno dei maggiori strumenti che svilupperemo in questo capitolo è il gruppo fondamentale, il quale ci informa sulla struttura dei cammini chiusi lungo le componenti connesse di uno spazio. Lo studio di caratteristiche di dimensione più alta è oggetto dei corsi di topologia algebrica.

Concluderemo il capitolo studiando i rivestimenti, le loro proprietà categoriche e i risultati che forniscono circa il sollevamento di cammini/omotopie e il calcolo di alcuni gruppi fondamentali.

3.1 La categoria \mathbf{hTop}

Prima di poter parlare di spazi "omotopi", dobbiamo definire una omotopia. L'idea dell'omotopia è quella di trasformare gradualmente una mappa in un'altra, in questo modo le immagini verranno gradualmente trasformate l'una nell'altra. Visivamente questo tipo di trasformazione è una deformazione continua dell'immagine. Per definire l'equivalenza omotopica sfrutteremo questa intuizione trasformando la mappa identità nella deformazione desiderata.

Definizione 3.1 (Omotopia).

Siano $f, g : X \rightarrow Y$ funzioni continue. Una **omotopia** tra f e g è una funzione

continua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tale che

- $H(x, 0) = f(x)$
- $H(x, 1) = g(x)$

Osservazione 3.2.

Stiamo definendo una famiglia di funzioni $H_t = H(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ che possiamo interpretare come “snapshot” di una trasformazione continua di f in g .

Notazione 3.3.

Se esiste una omotopia tra f e g scriviamo¹ $f \simeq g$ e diciamo che f e g sono mappe **omotope**.

Proposizione 3.4 (Omotopia è relazione di equivalenza).

La relazione $f \sim g \iff f \simeq g$ è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X a Y .

Dimostrazione.

Riflessiva) $H(x, t) = f(x)$ è una omotopia da f a f .

Simmetrica) Se H è una omotopia da f a g allora

$$H'(x, t) = H(x, 1 - t)$$

è una omotopia da g a f .

Transitiva) Sia H^1 una omotopia da f a g e sia H^2 una omotopia da g a h , allora

$$H(x, t) = \begin{cases} H^1(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H^2(x, 2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è continua perché $\{X \times [0, \frac{1}{2}], X \times [\frac{1}{2}, 1]\}$ è un ricoprimento chiuso finito di $X \times [0, 1]$, quindi è fondamentale (2.178) e H è continua su ogni pezzo e sull'intersezione $H(x, \frac{1}{2}) = H^1(x, 1) = H^2(x, 0) = g(x)$. Abbiamo quindi definito una omotopia da f a h . \square

Notazione 3.5.

Se $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ continue}\}$ allora poniamo

$$[X, Y] = C(X, Y) / \simeq$$

e data $f \in C(X, Y)$ indichiamo la sua classe in $[X, Y]$ con $[f]$ o $[f]_{\simeq}$ se si presenta ambiguità.

Proposizione 3.6 (Composizione passa alla relazione di omotopia).

Siano X, Y, Z spazi topologici. Se $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$ sono mappe continue tali che $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$ allora

$$g \circ f \simeq g' \circ f'.$$

¹I professori usano la notazione $f \sim g$, ma data l'abbondanza di relazioni di equivalenza in questo corso, e dato che la notazione \simeq è usata in alcuni libri, l'ho preferita per evitare ambiguità nel lettore (e per gusto personale).

Dimostrazione.

Sia $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ una omotopia tra f e f' e sia $K : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ una omotopia tra g e g' . Definiamo

$$\tilde{H}(x, t) = K(H(x, t), t)$$

e verifichiamo che è una omotopia tra le composizioni della tesi:

- \tilde{H} è continua perché composizione di continue
- $\tilde{H}(x, 0) = K(H(x, 0), 0) = g(f(x))$
- $\tilde{H}(x, 1) = K(H(x, 1), 1) = g'(f'(x))$.

□

Grazie a queste proprietà possiamo dare la definizione degli isomorfismi tra spazi equivalenti per omotopia:

Definizione 3.7 (Inversa omotopica e Equivalenza omotopica).

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Una **inversa omotopica** di f è una mappa $g : Y \rightarrow X$ continua tale che

$$g \circ f \simeq id_X \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

Se f ammette inversa omotopica diremo che f è una **equivalenza omotopica** e che X e Y sono **omotopicamente equivalenti**.

Osservazione 3.8.

Spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti.

Notazione 3.9.

Se X e Y sono omotopicamente equivalenti scriviamo

$$X \simeq Y.$$

Proposizione 3.10 (Equivalenza omotopica è una equivalenza).

La relazione $X \sim Y \iff X \simeq Y$ è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione.

Riflessiva) X è omeomorfo a X , quindi a maggior ragione vi è omotopicamente equivalente.

Simmetrica) Se f è una equivalenza omotopica da X a Y allora ammette una inversa omotopica $g : Y \rightarrow X$. Per concludere basta osservare che f è una inversa omotopica di g .

Transitiva) Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ inverse omotopiche e siano $h : Y \rightarrow Z$ e $k : Z \rightarrow Y$ inverse omotopiche. Per concludere basta mostrare che $h \circ f$ e $g \circ k$ inverse omotopiche.

$$g \circ \underbrace{k \circ h}_{\simeq id_Y} \circ f \simeq g \circ id_Y \circ f \simeq id_X,$$

dove la prima omotopia segue dal fatto che la composizione di mappe omotope restituisce mappe omotope (3.6). L'altra composizione si fa allo stesso modo. □

Riassumendo, abbiamo definito la categoria $hTop$, ovvero la categoria i cui oggetti sono spazi topologici e le cui frecce sono mappe continue considerate a meno di omotopia. In questa categoria gli isomorfismi sono detti equivalenze omotopiche.

3.1.1 Le omotopie passano al quoziente

Proposizione 3.11.

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'identificazione e Z uno spazio localmente compatto, allora la funzione

$$H : \begin{array}{ccc} X \times Z & \longrightarrow & Y \times Z \\ (x, t) & \longmapsto & (f(x), t) \end{array}$$

è un'identificazione.

Dimostrazione.

Osserviamo che H è continua perché continua in ogni componente e surgettiva perché f surgettiva.

Per verificare la definizione di identificazione è dunque sufficiente mostrare che $H^{-1}(A)$ aperto implica A aperto per ogni $A \subseteq Y \times Z$. Mostriamo sotto questa ipotesi che A è intorno di ogni suo punto. Sia dunque $(y, z) \in A$ e sia $x \in X$ tale che $f(x) = y$ (che possiamo fare per surgettività di f).

Per definizione di topologia prodotto e locale compattezza esistono U_1 intorno di x e \bar{V} intorno compatto di z tali che $U_1 \times \bar{V} \subseteq H^{-1}(A)$.

Per mostrare la tesi al posto di U_1 avremmo bisogno di un aperto saturo, in modo che applicando H troveremmo un prodotto di aperti contenuti in A .

Osserviamo che

$$H^{-1}(H(U_1 \times \bar{V})) = f^{-1}(f(U_1)) \times \bar{V} \subseteq H^{-1}(H(H^{-1}(A))) = H^{-1}(A).$$

Per il teorema di Wallace (2.250)² si ha che per ogni punto $u_1 \in f^{-1}(f(U_1))$ esiste un intorno W_{u_1} tale che $\{u_1\} \times \bar{V} \subseteq W_{u_1} \times \bar{V} \subseteq H^{-1}(A)$. Definiamo dunque

$$U_2 = \bigcup_{u_1 \in f^{-1}(f(U_1))} W_{u_1}.$$

Reiterando questa costruzione definiamo U_i per ogni $i \in \mathbb{N}$ e infine poniamo $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Per costruzione U è un aperto saturo e $U \times \bar{V} \subseteq H^{-1}(A)$ come voluto. \square

Corollario 3.12 (Omotopie passano al quoziente).

Se \sim è una relazione di equivalenza su X e $H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$ è una omotopia tale che $x \sim y \implies H(x, t) = H(y, t)$ allora

$$\bar{H} : \begin{array}{ccc} X/\sim \times [0, 1] & \longrightarrow & Z \\ ([x], t) & \longmapsto & H(x, t) \end{array}$$

è un'omotopia.

Dimostrazione.

Osserviamo che $\pi : X \rightarrow X/\sim$ è una identificazione, quindi per la proposizione precedente $\pi \times id$ è una identificazione ($[0, 1]$ è chiaramente localmente compatto).

Sia $A \subseteq Z$ aperto. Dato che $\pi \times id$ è una identificazione, $\bar{H}^{-1}(A)$ è aperto se e solo se $(\pi \times id)^{-1}(\bar{H}^{-1}(A)) = H^{-1}(A)$ è aperto, ma questo insieme è aperto per continuità di H . \square

² $\{u_1\} \subseteq X$ e $\bar{V} \subseteq Z$ giocano il ruolo dei compatti e $H^{-1}(A)$ dell'aperto

3.1.2 Funtore delle componenti connesse per archi

Ricordiamo che π_0 è un funtore dalla categoria degli spazi topologici Top alla categoria degli insiemi Set (2.213), sappiamo cioè che

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\}$$

è un insieme e che $f : X \rightarrow Y$ continua induce una mappa $f_* = \pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ ben definita. Vediamo che il funtore e le omotopie sono compatibili, cioè

Teorema 3.13 (Mappe omotope inducono la stessa mappa nei π_0).

Se $f, g : X \rightarrow Y$ sono mappe omotope allora inducono la stessa mappa $f_* = g_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$.

Dimostrazione.

Sia $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ una omotopia da f a g . Osserviamo che $\gamma_x(t) = H(x, t)$ è un cammino in Y che unisce $f(x)$ e $g(x)$, quindi in particolare

$$f_*([x]_{\pi_0(X)}) = [f(x)]_{\pi_0(Y)} = [g(x)]_{\pi_0(Y)} = g_*([x]_{\pi_0(X)}).$$

□

Il teorema può essere interpretato come la buona definizione del funtore $\pi_0 : hTop \rightarrow Set$ per quanto riguarda le frecce. Una conseguenza immediata della funtorialità è il seguente

Corollario 3.14.

Se $X \simeq Y$ allora $\pi_0(X)$ è in bigezione con $\pi_0(Y)$.

Dimostrazione.

Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ sono inverse omotopiche allora f_* e g_* sono inverse insiemistiche. Infatti

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (id_Y)_* = id_{\pi_0(Y)},$$

dove abbiamo usato il teorema e il fatto che $f \circ g \simeq id_Y$. L'altra composizione segue in modo analogo. □

3.2 Gruppo fondamentale

In questa sezione definiamo l'oggetto più importante del capitolo, cioè il gruppo fondamentale.

3.2.1 Omotopia di cammini

Notazione 3.15.

Indichiamo l'insieme dei cammini da x_0 a x_1 in X come

$$\Omega(X, x_0, x_1).$$

Se X è chiaro dal contesto potremo ometterlo. Se $x_0 = x_1$ potremo scrivere $\Omega(X, x_0)$, o addirittura $\Omega(x_0)$.

Un cammino tale che $x_0 = x_1$ è detto **laccio** o **loop**.

Per lavorare bene coi cammini notiamo che non possiamo usare le omotopie “libere” definite precedentemente, infatti

Osservazione 3.16.

Un cammino γ è omotopo alla funzione costante $x \mapsto \gamma(0)$. In particolare cammini con un estremo in comune sono sempre omotopi.

Dimostrazione.

Osserviamo che $H(s, t) = \gamma((1-t)s)$ è una omotopia della forma cercata. \square

Per aggirare questo inconveniente diamo la seguente

Definizione 3.17 (Omotopia di cammini).

Una **omotopia di cammini** (o **omotopia a estremi fissati**) fra $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X, x_0, x_1)$ è una omotopia $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che

1. $H(x, 0) = \gamma_0(x)$ e $H(x, 1) = \gamma_1(x)$
2. $H(0, t) = x_0$ e $H(1, t) = x_1$, cioè $H(\cdot, t) \in \Omega(X, x_0, x_1)$.

Proposizione 3.18.

Le omotopie di cammini inducono una relazione di equivalenza su $\Omega(X, x_0, x_1)$.

Dimostrazione.

Riflessiva) $H(x, t) = \gamma(x)$ è una omotopia a estremi fissati.

Simmetrica) Se H è una omotopia a estremi fissati da f a g allora $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1-t)$ è una omotopia a estremi fissati da g a f .

Transitiva) Se H è una omotopia a estremi fissati da γ_0 a γ_1 e K una da γ_1 a γ_2 allora

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(x, 2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è una omotopia a estremi fissati da γ_0 a γ_2 . \square

Notazione 3.19.

Se γ_1 e γ_2 sono omotopi a estremi fissati scriviamo $\gamma_1 \simeq \gamma_2$.

Dato che cammini sono sempre omotopi a costanti per omotopie libere, con la notazione sopra intenderemo che esiste una omotopia a estremi fissi che porta l'uno nell'altro se non altrimenti specificato.

Se scriviamo che $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ in $\Omega(X, x_0, x_1)$ allora intendiamo che sono omotopi a estremi fissati.

Teorema 3.20.

*Se $\gamma_1 \simeq \gamma'_1$ in $\Omega(x_0, x_1)$ e $\gamma_2 \simeq \gamma'_2$ in $\Omega(x_1, x_2)$, allora $\gamma_1 * \gamma_2 \simeq \gamma'_1 * \gamma'_2$ in $\Omega(x_0, x_2)$.*

Dimostrazione.

Se H è una omotopia di cammini tra γ_1 e γ'_1 e K una tra γ_2 e γ'_2 allora

$$H * K(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(2s-1, t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è ben definita (in quanto $H(1, t) = K(0, t) = x_1$) e continua. Osserviamo che $H * K$ è una omotopia da $\gamma_1 * \gamma_2$ a $\gamma'_1 * \gamma'_2$, e che $H * K(0, t) = x_0$, $H * K(1, t) = x_2$, quindi è anche una omotopia di cammini. \square

3.2.2 Gruppo Fondamentale

Definizione 3.21 (Gruppo Fondamentale).

Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Il **gruppo fondamentale** (o **primo gruppo di omotopia**) di X con **punto base** $x_0 \in X$ è

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0) / \simeq,$$

cioè l'insieme delle classi di equivalenza di lacci in X passanti per x_0 per la relazione di omotopia a estremi fissati.

Osservazione 3.22.

$\pi_1(X, x_0)$ dipende solo dalla componente connessa per archi che contiene x_0 .

Mostriamo che il gruppo fondamentale è effettivamente un gruppo con l'operazione di giunzione. Consideriamo prima il seguente lemma

Lemma 3.23 (Riparametizzazioni).

Sia $j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua tale che $j(0) = 0$ e $j(1) = 1$. Allora $\alpha \simeq \alpha \circ j$ per ogni $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_1)$.

Dimostrazione.

Consideriamo la mappa

$$H(s, t) = \alpha(ts + (1-t)j(s)).$$

Osserviamo che è continua perché composizione di continue. Inoltre

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha \circ j(s), \\ H(s, 1) &= \alpha(s), \\ H(0, t) &= \alpha((1-t)j(0)) = \alpha(0), \\ H(1, t) &= \alpha(t + (1-t)j(1)) = \alpha(t + 1 - t) = \alpha(1), \end{aligned}$$

cioè H è una omotopia di cammini da $\alpha \circ j$ a α . □

Teorema 3.24 (Il gruppo fondamentale è un gruppo).

Se $*$ è la mappa indotta dalla giunzione in omotopia, si ha che

$$(\pi_1(X, x_0), *) \text{ è un gruppo.}$$

Dimostrazione.

Chiusura per operazione) Evidente.

Associatività) Dati $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$, vogliamo mostrare che

$$(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma).$$

Questo segue dal lemma 3.23 considerando $j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita a tratti

$$j(t) = \begin{cases} t/2 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t - \frac{1}{4} & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2t - 1 & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

Più precisamente $\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ j$.

Elemento Neutro) Sia $1 = [c_{x_0}]$, dove $c_{x_0} : [0, 1] \rightarrow X$ è il cammino costante $c_{x_0}(t) = x_0$. Mostriamo che dato $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ abbiamo $\alpha * c_{x_0} \simeq \alpha \simeq c_{x_0} * \alpha$.

Questo segue osservando che $\alpha * c_{x_0}$ è una riparametrizzazione di α , infatti $\alpha * c_{x_0} = \alpha \circ j$ per

$$j(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Analogamente $c_{x_0} * \alpha$ è una riparametrizzazione di α .

Esistenza inversi Poniamo $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ ³ e verifichiamo che $\alpha * \bar{\alpha} \simeq c_{x_0} \simeq \bar{\alpha} * \alpha$. Dato che $\bar{\alpha} = \alpha$, basta verificare che $\alpha * \bar{\alpha} \simeq c_{x_0}$.

Definiamo la seguente mappa

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s) & t \geq 2s \\ \alpha(t) & t \leq 2s \text{ e } t \leq 2-2s \\ \alpha(2-2s) & t \geq 2-2s \end{cases}$$

Osserviamo che $H(s, 0) = \alpha(0) = x_0$ e che $H(s, 1) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2-2s) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$,
cioè $H(s, 1) = \alpha * \bar{\alpha}$. Si ha che H è continua, infatti per $t = 2s$ abbiamo $\alpha(2s) = \alpha(t)$ e per $t = 2-2s$ abbiamo $\alpha(t) = \alpha(2-2s)$. Per concludere che H è una omotopia di cammini basta notare che $H(0, t) = \alpha(0) = x_0$ e $H(1, t) = \alpha(2-2) = \alpha(0) = x_0$. \square

Definizione 3.25 (Semplicemente connesso).

Uno spazio topologico X è **semplicemente connesso** se è connesso per archi e $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ per qualsiasi $x_0 \in X$

3.2.3 Cammini chiusi come applicazioni dal cerchio

Per questa sezione poniamo

$$p : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

dove consideriamo $S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\} \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Osservazione 3.26.

Esiste una corrispondenza biunivoca tra $\Omega(X, x_0)$ e $\{f : S^1 \rightarrow X \mid x_0 \in \text{Imm } f\}$

Dimostrazione.

Ricordiamo che $[0, 1] / \{0, 1\} \cong S^1$. Data $\alpha \in \Omega(x_0)$, poiché $\alpha(0) = \alpha(1)$, abbiamo che $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ passa al quoziente $[0, 1] / \{0, 1\} \cong S^1 \rightarrow X$. Dato che il quoziente topologico è un quoziente categorico (2.306), vale la proprietà universale, cioè esiste un'unica $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$ tale che il diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & X \\ p \downarrow & \nearrow \hat{\alpha} & \\ S^1 & & \end{array}$$

³Preferisco $\bar{\alpha}$ al posto di α^{-1} perché α^{-1} potrebbe riferirsi alla preimmagine del cammino.

Viceversa, data $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$ continua con $\hat{\alpha}(1) = x_0$ ⁴ si ha che $\alpha = \hat{\alpha} \circ p \in \Omega(x_0)$. \square

Dalla definizione del gruppo fondamentale sospettiamo che questo ci permetta di determinare quando nello spazio sono presenti “buchi” (definizioni più precise saranno date dopo). La seguente proposizione comincia a far intravedere questo concetto in modo più formale:

Proposizione 3.27 (Continua su bordo si estende se e solo se classe di omotopia banale).

Dato $\alpha \in \Omega(x_0)$, si ha che

$$[\alpha] = 1 \text{ in } \pi_1(X, x_0) \iff \hat{\alpha} \text{ si estende da } S^1 \text{ a } D^2.$$

Dimostrazione.

\implies) Sia $[\alpha] = 1$. Per definizione esiste una omotopia di cammini H tra α e c_{x_0} . Possiamo collassare i tre lati dell’omotopia che non contengono α

$$[0, 1] \times [0, 1] / \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{1\}$$

per ottenere un disco. Sia \hat{H} il passaggio di H al quoziente. Osserviamo che \hat{H} ristretta a $\partial D^2 = S^1$ coincide con $\hat{\alpha}$, quindi \hat{H} è l’estensione di $\hat{\alpha}$ a tutto D^2 .

\impliedby) Supponiamo di avere a disposizione $\hat{H} : D^2 \rightarrow X$ continua tale che $\hat{H}|_{S^1} = \hat{\alpha}$. Sia $\pi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D^2$ l’identificazione già menzionata al punto precedente, cioè tale che $\pi(s, 0) = e^{2\pi i s}$ e $\pi(s, 1) = \pi(0, t) = \pi(1, t) = 1$. Per concludere basta osservare che $H = \hat{H} \circ \pi$ è un’omotopia di cammini tra α e c_{x_0} . \square

Proposizione 3.28.

La corrispondenza $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ induce una mappa $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$ ben definita.

Dimostrazione.

Vogliamo mostrare che se $\alpha \simeq \beta$ con omotopia di cammini allora $\hat{\alpha} \simeq \hat{\beta}$ con omotopia libera. Sia $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ una omotopia di cammini da α a β .

Per trovare l’omotopia immaginiamo di identificare i lati opposti del rettangolo $[0, 1]^2$ che corrispondono a x_0 per ottenere un cilindro i cui bordi superiore e inferiore saranno $\hat{\beta}$ e $\hat{\alpha}$ rispettivamente.

Osserviamo che $H(0, t) = H(1, t) = x_0$. Segue che H induce

$$\bar{H} : [0, 1] / \{0, 1\} \times [0, 1] \rightarrow X,$$

che a meno di omeomorfismo posso interpretare come

$$\tilde{H} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X,$$

la quale è una omotopia da $\hat{\alpha}$ a $\hat{\beta}$. \square

⁴stiamo considerando $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, quindi 1 corrisponde a (1, 0) in \mathbb{R}^2 .

Lemma 3.29 (Cammini complementari sul bordo di convesso).

Sia D un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^2 chiuso e limitato. Siano γ_1 e γ_2 due archi complementari su ∂D (che per le ipotesi è connesso per archi) che vanno da p a q , cioè $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q$, $\text{Imm } \gamma_1 \cap \text{Imm } \gamma_2 = \{p, q\}$ e hanno supporto nel bordo.

Allora γ_1 e γ_2 sono omotope a estremi fissi.

Dimostrazione.

Consideriamo $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ data da $H(s, t) = t\gamma_2(s) + (1-t)\gamma_1(s)$. Chiaramente H è continua perché composizione di continue, ed è ben definita perché D è convesso. Osserviamo che $H(0, t) = t\gamma_1(0) + (1-t)\gamma_2(0) = tp + (1-t)p = p$, similmente $H(1, t) = q$, $H(s, 0) = \gamma_1(s)$ e $H(s, 1) = \gamma_2(s)$, quindi H è una omotopia a estremi fissati da γ_1 a γ_2 in D . \square

Teorema 3.30 (Proprietà della corrispondenza tra $\pi_1(X)$ e $[S^1, X]$).

Valgono le seguenti affermazioni:

- Se X è connesso per archi la $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$ definita prima è surgettiva.
- $\psi(g) = \psi(h)$ se e solo se g e h sono coniugati in $\pi_1(X, x_0)$.

Dimostrazione.

*) Sia $\gamma : S^1 \rightarrow X$ una mappa continua. Cerchiamo $\alpha \in \Omega(x_0)$ tale che $\psi([\alpha]) = [\gamma]$, cioè tale che $\hat{\alpha} \simeq \gamma$ con omotopia libera.

Poniamo $\gamma(1) = x_1$. Siccome X è connesso per archi esiste un cammino $\delta : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\delta(0) = x_0$ e $\delta(1) = x_1$. Sia $\tilde{\gamma} \in \Omega(x_1)$ tale che $\gamma = \hat{\tilde{\gamma}}$, cioè

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(e^{2\pi it}).$$

Possiamo ora definire il loop cercato come $\alpha = \delta * \tilde{\gamma} * \bar{\delta} \in \Omega(x_0)$.

Mostriamo che $\hat{\alpha} \simeq \gamma$. L'idea è accorciare gradualmente δ facendo avvicinare il primo estremo da x_0 a x_1 . Poniamo dunque

$$\delta_t(s) = \begin{cases} \delta(t) & s \in [0, t] \\ \delta(s) & s \in [t, 1] \end{cases},$$

cioè δ_t sta fermo in $\delta(t)$ fino al tempo t e poi prosegue da lì in poi come faceva δ . Osserviamo che $\delta_0 = \delta$ e $\delta_1 = c_{x_1}$ è la mappa costante a x_1 . Poniamo

$$H(s, t) = (\delta_t * \tilde{\gamma} * \bar{\delta}_t)(s).$$

Chiaramente H è continua. Osserviamo che $H(s, 0) = \delta * \tilde{\gamma} * \bar{\delta} = \alpha(s)$ e $H(s, 1) = c_{x_1} * \tilde{\gamma} * c_{x_1} \simeq \tilde{\gamma}$, dove questa omotopia deriva dal fatto che questi cammini sono riparametrazioni l'uno dell'altro (3.23).

Dato che $H(0, t) = \delta(t) = H(1, t)$ si ha che H induce un'omotopia

$$\bar{H} : [0, 1] / \{0, 1\} \times [0, 1] \rightarrow X,$$

che a sua volta induce per omeomorfismo una omotopia $\hat{H} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ tra $\hat{\alpha}$ e $\hat{\tilde{\gamma}} = \gamma$, come volevamo.

*) \Leftarrow) Supponiamo che g e h siano coniugati, cioè esistono $\alpha, \delta \in \Omega(x_0)$ tali

che $g = [\alpha]$, $h = [\delta] * [\alpha] * [\delta]^{-1} = [\delta * \alpha * \bar{\delta}]$. Vogliamo mostrare che $\psi(g) = \psi(h)$, cioè $\widehat{\alpha} \simeq \widehat{\delta * \alpha * \bar{\delta}}$ con omotopia libera.

Come prima basta accorciare gradualmente δ : definiamo $\delta_t(s)$ come sopra e ponendo

$$H(s, t) = (\delta_t * \alpha * \bar{\delta}_t)(s)$$

induciamo una omotopia $\widehat{H} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ tra $\widehat{\delta * \alpha * \bar{\delta}}$ e $\widehat{\alpha}$ ⁵.

\implies) Supponiamo che $\psi(g) = \psi(h)$, cioè che esistano $\alpha, \beta \in \Omega(x_0)$ tali che $g = [\alpha]$, $h = [\beta]$ e $\widehat{\alpha} \simeq \widehat{\beta}$ in $[S^1, X]$. Sia allora $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ una omotopia libera da $\widehat{\alpha}$ a $\widehat{\beta}$. Definiamo $\widetilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ come

$$\widetilde{H}(s, t) = H(e^{2\pi it}, t).$$

Osserviamo che $\widetilde{H}(s, 0) = \alpha(s)$ e che $\widetilde{H}(s, 1) = \beta$. Se poniamo $\delta(t) = \widetilde{H}(0, t) = \widetilde{H}(1, t)$, osserviamo che α e $\delta * \beta * \bar{\delta}$ sono cammini complementari di $\partial[0, 1] \times [0, 1]$ (bordo del dominio di \widetilde{H}). Per il lemma (3.29) esiste una omotopia a estremi fissi tra α e $\delta * \beta * \bar{\delta}$, quindi

$$[\alpha] = [\delta * \beta * \bar{\delta}] = [\delta] * [\beta] * [\delta]^{-1},$$

cioè g e h sono coniugati nel gruppo fondamentale. □

Riassumiamo i risultati ottenuti in questa sezione nella seguente

Proposizione 3.31 (Corrispondenza tra omotopie di cammini in $\Omega(X, x_0)$ e omotopie libere in $[S^1, X]$).

Valgono i seguenti fatti:

- *C'è una corrispondenza biunivoca tra $\Omega(X, x_0)$ e le funzioni continue da S^1 a X tali che x_0 appartiene all'immagine.*
- *Un loop corrisponde alla classe banale nel gruppo fondamentale se e solo se la sua mappa su S^1 corrispondente si può estendere in modo continuo a tutto D^2*
- *La corrispondenza sopra induce $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$ tale che*
 - *è costante sulle classi di coniugio del gruppo fondamentale e su classi diverse ha immagine diversa*
 - *Se X è connesso per archi allora è surgettiva.*

3.2.4 Funtorialità del gruppo fondamentale

Abbiamo visto come gli spazi topologici considerati con le funzioni continue formano una categoria. Se consideriamo gli spazi topologici fissando anche un punto, detto **punto base**, e consideriamo le mappe continue che mandano il punto base nel punto base troviamo un'altra categoria molto simile, che indichiamo con Top_* . Più formalmente

⁵Se può aiutare il lettore, stiamo facendo assumere a $\delta * \alpha * \bar{\delta}$ il ruolo che prima aveva α e ad α il ruolo che prima aveva $\delta * \widetilde{\gamma} * \delta$

Definizione 3.32 (Categoria degli spazi topologici puntati).

Definiamo Top_* come la categoria i cui oggetti sono coppie della forma (X, x_0) con X spazio topologico e $x_0 \in X$, e i cui morfismi sono mappe continue $f : X \rightarrow Y$ che rispettano i punti base, cioè se $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ allora f è continua e $f(x_0) = y_0$.

Gli oggetti di Top_* sono detti **spazi topologici puntati** e i morfismi di Top_* sono detti **mappe continue puntate**.

Osservazione 3.33.

Se $f : X \rightarrow Y$ continua manda x_0 in y_0 allora se $\alpha \in \Omega(x_0)$ abbiamo che $f \circ \alpha \in \Omega(y_0)$.

Inoltre, se $\alpha \simeq \beta$ come cammini allora $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$, sempre come cammini (basta comporre l'omotopia con f).

Quanto appena osservato ci dice che $f : X \rightarrow Y$ induce una mappa

$$f_* : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\alpha] & \longmapsto & [f \circ \alpha] \end{array} .$$

Proposizione 3.34 (Funtore da Top_* a Grp).

Consideriamo la seguente associazione:

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \mapsto & \pi_1(X, x_0) \\ f : X \rightarrow Y & \mapsto & f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

dove f_* indica la mappa indotta da f come sopra.

Si ha che questa associazione è un funtore da Top_* a Grp , cioè

- $id_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ continue tali che $y_0 = f(x_0)$ e $z_0 = g(y_0)$, allora

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$$

- f_* è un omomorfismo di gruppi.

Dimostrazione.

*) Ovvio

*) Segue dal seguente calcolo

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_* \circ f_*([\alpha]).$$

*) Siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, si ha che

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] * [\beta]) &= [f \circ (\alpha * \beta)] = \\ &= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = \\ &= [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] = \\ &= f_*([\alpha]) * f_*([\beta]). \end{aligned}$$

□

Corollario 3.35.

Se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo allora $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ è un isomorfismo di gruppi.

Definiamo ora l'analogo delle omotopie su Top_* :

Definizione 3.36 (Omotopia puntata).

Se $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sono continue e puntate definiamo una **omotopia puntata** da f a g una omotopia H da f a g tale che $H_t(\cdot, t)$ è una mappa continua puntata da (X, x_0) a (Y, y_0) , cioè $H(x_0, t) = y_0$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Proposizione 3.37 (Mappe omotope puntate inducono la stessa mappa sui gruppi fondamentali).

Siano $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ mappe continue puntate omotope tramite una omotopia puntata H . Allora $f_* = g_*$ come mappe da $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Dimostrazione.

Sia $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Cerchiamo una omotopia a estremi fissi da $f \circ \alpha$ a $g \circ \alpha$. Poniamo

$$\tilde{H} : \begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \longrightarrow & Y \\ (s, t) & \longmapsto & H(\alpha(s), t) \end{array} .$$

Questa è una omotopia da $f \circ \alpha$ a $g \circ \alpha$ per costruzione, ed è a estremi fissi perché H è una omotopia puntata, infatti per ogni $t \in [0, 1]$ abbiamo

$$\tilde{H}(0, t) = H(\alpha(0), t) = H(x_0, t) = H(\alpha(1), t) = \tilde{H}(1, t).$$

□

Abbiamo quindi mostrato che π_1 è un funtore da $hTop_*$ a Grp .

3.2.5 Dipendenze del gruppo fondamentale

Teorema 3.38 (Il punto base determina $\pi_1(X)$ a meno di isomorfismo).

Sia X connesso per archi e siano $x_0, x_1 \in X$. Ogni cammino $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ da x_0 a x_1 induce un isomorfismo di gruppi $\gamma_\# : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Dimostrazione.

Definiamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} \Omega(X, x_1) & \longrightarrow & \Omega(X, x_0) \\ \alpha & \longmapsto & \gamma * \alpha * \bar{\gamma} \end{array} .$$

Osserviamo che questa mappa rispetta le omotopie di cammini, infatti

$$\alpha \simeq \beta \implies \gamma * \alpha \simeq \gamma * \beta \implies \gamma * \alpha * \bar{\gamma} \simeq \gamma * \beta * \bar{\gamma},$$

quindi è ben definita

$$\gamma_\# : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Con il seguente conto si verifica che $\gamma_\#$ è un omomorfismo di gruppi:

$$\gamma * \alpha * \beta * \bar{\gamma} \simeq \gamma * \alpha * \bar{\gamma} * \gamma * \beta * \bar{\gamma}.$$

Infine basta osservare che $(\bar{\gamma})_\# = \gamma_\#^{-1}$, da cui seguirà che $\gamma_\#$ è un isomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} \gamma_\#((\bar{\gamma})_\#([\alpha])) &= \gamma_\#([\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]) = \\ &= [\gamma * \bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma}] = \\ &= [\gamma] * [\gamma]^{-1} * [\alpha] * [\gamma] * [\gamma]^{-1} = \\ &= [\alpha]. \end{aligned}$$

L'altra composizione è analoga.

□

Osservazione 3.39.

L'isomorfismo dipende dal cammino.

Proposizione 3.40 (Mappa omotopa all'identità induce isomorfismo).

Sia $f : X \rightarrow X$ una mappa omotopa all'identità e sia $x_0 \in X$. Allora $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, f(x_0))$ è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione.

Sia $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ una omotopia da id a f e poniamo $\gamma(t) = H(x_0, t)$, cioè γ è il cammino che segue x_0 durante l'omotopia. Per concludere mostriamo che $f_* = \gamma_{\#}^{-1}$ (in particolare f_* sarà un isomorfismo per (3.38)): dato $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ consideriamo

$$K(s, t) = H(\alpha(s), t).$$

Per il lemma sui cammini complementari (3.29) si ha che $\gamma_* f \circ \alpha \simeq \alpha_* \gamma$, quindi $[\alpha] = \gamma_{\#}(f_*([\alpha]))$, che è cioè che volevamo. \square

Corollario 3.41 (Invarianza omotopica).

Sia $f : X \rightarrow Y$ una equivalenza omotopica e sia $x_0 \in X$. Si ha che $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ è un isomorfismo. In particolare spazi omotopi hanno π_1 isomorfo.

Dimostrazione.

Sia $g : Y \rightarrow X$ l'inversa omotopica e poniamo $g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$.

Osserviamo che $g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$ è un isomorfismo per la proposizione precedente, infatti $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ e $g \circ f \simeq id$ per definizione di inverse omotopiche. Si ha dunque che f_* è iniettiva. Con un ragionamento simile, considerando $f'_* : \pi_1(X, g(f(x_0))) \rightarrow \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$, si trova che g_* è iniettiva.

Essendo $g_* \circ f_*$ bigettiva, è in particolare surgettiva. Siccome g_* è iniettiva si deve avere che f_* è surgettiva, quindi f_* è sia iniettiva che surgettiva e sappiamo (3.34) che f_* è un omomorfismo, quindi f_* è un isomorfismo, come voluto. \square

3.3 Spazi contraibili e retratti

3.3.1 Spazi contraibili

Studiamo la classe banale per equivalenza omotopica:

Definizione 3.42 (Spazio contraibile).

Uno spazio X è **contraibile** se è omotopicamente equivalente ad un punto.

Uno degli esempi più comuni di spazi contraibili sono i seguenti:

Definizione 3.43 (Insieme stellato).

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è **stellato** rispetto a $x_0 \in \Omega$ se

$$\forall x \in \Omega, [x, x_0] \subseteq \Omega,$$

dove $[x, x_0] = \{tx + (1-t)x_0 \mid t \in [0, 1]\}$ indica il segmento con estremi x e x_0 .

Definizione 3.44 (Insieme Convesso).

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso** se è stellato rispetto a ogni suo punto, cioè se

$$\forall x, y \in \Omega, [x, y] \subseteq \Omega.$$

Osservazione 3.45.

Ogni insieme convesso è stellato, ma non ogni insieme stellato è convesso.

Osservazione 3.46.

Un insieme stellato è connesso per archi, infatti ogni punto appartiene alla classe di x_0 nel π_0 .

Proposizione 3.47 (Mappe a immagine in stellato).

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato e X è uno spazio topologico qualsiasi allora tutte le mappe continue da X a Ω sono omotope.

Dimostrazione.

Supponiamo che Ω sia stellato rispetto a $x_0 \in \Omega$. Mostriamo che tutte le mappe continue $f : X \rightarrow \Omega$ sono omotope alla mappa costante $h(X) = \{x_0\}$, così facendo avremo concluso dato \simeq è una relazione di equivalenza.

Vogliamo costruire una omotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tale che $H_0 = f$ e $H_1 = h$. Per definizione di insieme stellato sappiamo che per ogni $\omega \in \Omega$ e per ogni $t \in [0, 1]$ si ha $t x_0 + (1 - t)\omega \in \Omega$, definiamo dunque

$$H(x, t) = t x_0 + (1 - t)f(x).$$

Questa mappa è ben definita per quanto appena detto osservando che $f(x) \in \Omega$. Evidentemente abbiamo anche $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = x_0$. Per concludere basta osservare che H è continua perché composizione di continue. \square

Corollario 3.48.

Gli insiemi stellati sono contraibili.

Dimostrazione.

Sia $p \in \Omega$ qualsiasi e poniamo $X = \{p\}$. Sia $f : \Omega \rightarrow X$ l'unica mappa possibile e mostriamo che è una equivalenza omotopica:

Sia $g : X \rightarrow \Omega$ una mappa qualsiasi. Chiaramente $f \circ g : X \rightarrow X = id_X$ perché è l'unica mappa possibile. Consideriamo ora $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega$: siccome è una mappa a immagine in uno stellato, questa è omotopa ad una qualsiasi altra mappa $\Omega \rightarrow \Omega$, in particolare $f \circ g \simeq id_\Omega$ come voluto. \square

Osservazione 3.49.

Dato che \mathbb{R}^n è stellato rispetto a 0, esso è contraibile.

3.3.2 Retratti di Deformazione

Nel definire un "retrato" di X potremmo pensare alla seguente

Definizione 3.50 (Retrato).

Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$. Y è un **retrato** di X se esiste una mappa $r : X \rightarrow Y$ continua (detta **retrazione**) tale che $r(y) = y$ per ogni $y \in Y$.

Proposizione 3.51 (Proprietà dei retratti).

Sia $Y \subseteq X$ un retratto e sia $r : X \rightarrow Y$ una retrazione. Si ha che

- Se X è T_2 allora Y è chiuso.
- Chiamando $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione si ha che $i_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$ è iniettiva.

Dimostrazione.

*) Ricordiamo che se X è T_2 allora la diagonale $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ è un chiuso (2.142). Osserviamo che

$$Y = \{x \in X \mid id(x) = i(r(x))\} = h^{-1}(\Delta),$$

dove $h(x) = (x, i(r(x)))$. Dato che h è continua, abbiamo mostrato che Y è chiuso perché preimmagine di chiuso.

) Per definizione di retrazione $r \circ i : Y \rightarrow Y$ è l'identità, perciò $r_ \circ i_* = id$, che è iniettiva, dunque necessariamente i_* è iniettiva. \square

Purtroppo questa definizione non è molto significativa da sola, come ci mostra la seguente

Osservazione 3.52.

Ogni punto $x_0 \in X$ è un retratto di X .

Le omotopie ci permettono di catturare meglio il concetto che volevamo descrivere:

Definizione 3.53 (Retratto di deformazione).

Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Y è un **retratto di deformazione** di X se esiste una mappa $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ continua tale che

1. $H(x, 0) = x$ per ogni $x \in X$,
2. $H(x, 1) \in Y$ per ogni $x \in X$
3. $H(y, t) = y$ per ogni $y \in Y$ e per ogni $t \in [0, 1]$,

chiediamo cioè che esista una omotopia tra id_X e una retrazione $r : X \rightarrow Y$ che fissi Y ad ogni istante.

$H(\cdot, 1) : X \rightarrow Y \subseteq X$ è detta **retrazione di deformazione**.

Osservazione 3.54.

Se Y è un retratto di deformazione di X allora $Y \simeq X$

Dimostrazione.

Sia $r = H(\cdot, 1) : X \rightarrow Y$ una retrazione di deformazione e $i : Y \rightarrow X$ l'inclusione. Mostriamo che sono inverse omotopiche:

Per definizione di retrazione

$$r \circ i = id_Y,$$

mentre

$$i \circ r \simeq id_X$$

tramite l'omotopia H . \square

Osservazione 3.55.

Non tutti i retratti sono retratti di deformazione, infatti se $\#\pi_0(X) > 1$ allora un punto è un retratto di X ma non un retratto di deformazione perché $\#\pi_0(X) \neq \#\pi_0(\{pt.\}) = 1$ (3.14).

Osservazione 3.56.

S^n è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Dimostrazione.

La mappa

$$H(x, t) = tx + (1 - t)\frac{1}{|x|}x$$

è una omotopia che rispetta la definizione di retratto di deformazione. \square

3.4 Rivestimenti

3.4.1 Omeomorfismi locali

Definizione 3.57 (Omeomorfismo Locale).

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è un **omeomorfismo locale** se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U)$ è aperto in Y e $f|_U : U \rightarrow f(U)$ è un omeomorfismo.

Le mappe $s : f(U) \rightarrow U$ definite come $f|_U^{-1}$ sono dette **sezioni** di f .

Osservazione 3.58.

Una mappa continua, iniettiva e aperta è un omeomorfismo locale.

Dimostrazione.

Osservo che $f(X)$ è aperto in quanto f è una mappa aperta. Per iniettività, $f : X \rightarrow f(X)$ è continua e bigettiva, inoltre è anche aperta per ipotesi, dunque $f : X \rightarrow f(X)$ è un omeomorfismo. \square

Proposizione 3.59 (Omeomorfismo locale implica aperta).

Se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo locale allora f è una mappa aperta.

Dimostrazione.

Sia $\Omega \subset X$ aperto e sia $y \in f(\Omega)$. Vogliamo mostrare che $f(\Omega)$ è un intorno di y , così per la caratterizzazione (2.75) avremo $f(\Omega)$ aperto.

Sia $x \in \Omega$ tale che $f(x) = y$. Dalla definizione di omeomorfismo locale esiste $x \in U \subseteq X$ aperto tale che $f|_U : U \rightarrow f(U)$ omeomorfismo. Osserviamo che $U \cap \Omega$ è un aperto che contiene x . Dato che $f|_U$ è un omeomorfismo, $f(U \cap \Omega)$ è aperto in $f(U)$, il quale è esso stesso aperto in Y per definizione di omeomorfismo locale. Si ha dunque che $f(U \cap \Omega)$ è aperto in Y . Dall'inclusione

$$y \in f(U \cap \Omega) \subseteq f(\Omega)$$

segue che $f(\Omega)$ è un intorno di y , come voluto. \square

Osservazione 3.60.

La restrizione di un omeomorfismo locale ad un aperto è un omeomorfismo locale.

Dimostrazione.

La restrizione di una mappa continua è continua e la restrizione di una mappa aperta ad un aperto è aperta. Se $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo locale e U è aperto in X si ha che per ogni $x \in X$, se V è un aperto tale che $f|_V : V \rightarrow f(V)$ è un omeomorfismo, si ha che $f|_{V \cap U} : V \cap U \rightarrow f(V \cap U)$ continua ad essere un omeomorfismo, quindi $f|_U$ è un omeomorfismo locale. \square

3.4.2 Rivestimenti

Definizione 3.61 (Rivestimento).

Una funzione continua $p : E \rightarrow X$ è un **rivestimento** se

1. X è connesso⁶
2. Per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x aperto, detto intorno **ben rivestito**, tale che

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i,$$

dove per ogni $i \in I$ abbiamo che W_i è aperto in E e che $p|_{W_i} : W_i \rightarrow U$ è un omeomorfismo.

In questa definizione, X è detto **spazio base**, mentre E è detto **spazio totale**.

Proposizione 3.62 (Rivestimento implica Omeomorfismo locale).

Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento allora è anche un omeomorfismo locale.

Dimostrazione.

Sia $\tilde{x} \in E$ e consideriamo $x = p(\tilde{x})$. Sia U un intorno aperto ben rivestito di x , cioè

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i.$$

Poiché $\tilde{x} \in p^{-1}(U)$, esiste un indice $i_0 \in I$ tale che $\tilde{x} \in W_{i_0}$. Per ipotesi su U abbiamo che $p(W_{i_0}) = U$ è aperto in X e per definizione di ricoprimento $p|_{W_{i_0}} : W_{i_0} \rightarrow U$ è un omeomorfismo. \square

Definizione 3.63 (Fibra).

Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento e $x_0 \in X$ chiamiamo $p^{-1}(x_0) \subseteq E$ la **fibra** di x_0 .⁷

Teorema 3.64 (Teorema delle Fibre).

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento e siano $x, y \in X$. Si ha che $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$, cioè le fibre hanno cardinalità costante.

Dimostrazione.

Fissiamo $x_0 \in X$ e poniamo

$$\Omega = \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|\}.$$

⁶Questa condizione è negoziabile. Alcuni testi non la includono mentre altri la rafforzano.

⁷Spesso il termine fibra si riferisce alla preimmagine di un singolo tramite *qualsiasi* funzione (non solo i rivestimenti), ma durante il corso è stato scelto di dare questa definizione più particolare e io la ripropongo.

Dato che X è connesso per definizione di rivestimento, se mostriamo che Ω e $\Omega^c = X \setminus \Omega$ sono aperti avremo che $\Omega = X$ oppure $\Omega = \emptyset$, ma dato che $x_0 \in \Omega$ si dovrà avere che $\Omega = X$.

Ω aperto) Sia $x \in \Omega$ e mostriamo che Ω è un intorno di x . Consideriamo un intorno aperto ben rivestito U di x in X , vale cioè

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i \quad \text{con } p|_{W_i} : W_i \rightarrow U \text{ omeomorfismo per ogni } i \in I.$$

Un omeomorfismo è in particolare una mappa bigettiva, dunque per ogni $z \in U$ si ha che $|p^{-1}(z) \cap W_i| = 1$ per ogni $i \in I$. Segue che $p^{-1}(z)$ è in bigezione con I tramite la corrispondenza $i \mapsto p^{-1}(z) \cap W_i$ (ricordiamo che $p^{-1}(z) \subseteq \bigsqcup W_i$, quindi effettivamente la mappa è surgettiva).

Abbiamo quindi mostrato che per ogni $z \in U$

$$|p^{-1}(z)| = |I| = |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|,$$

dove l'ultima uguaglianza è la definizione di $x \in \Omega$. Abbiamo dunque mostrato che $x \in U \subseteq \Omega$ e quindi Ω è intorno di x per ogni $x \in \Omega$.

Ω chiuso) Mostriamo che Ω^c è un intorno di x per ogni $x \in \Omega^c$. Fissato $x \in \Omega^c$ abbiamo che $|p^{-1}(x)| \neq |p^{-1}(x_0)|$. Per il ragionamento fatto sopra esiste un intorno aperto U di x tale che per ogni $z \in U$

$$|p^{-1}(z)| = |p^{-1}(x)| \neq |p^{-1}(x_0)|,$$

dunque $x \in U \subseteq \Omega^c$ come voluto. □

Il teorema ci permette di definire una quantità importate per i rivestimenti:

Definizione 3.65 (Grado di un rivestimento).

Dato un rivestimento $p : E \rightarrow X$, chiamiamo **grado** del rivestimento la cardinalità di una qualsiasi fibra.

Osservazione 3.66.

Il teorema delle fibre (3.64) può essere riformulato in “Il grado è definito per ogni rivestimento”.

Osservazione 3.67 (I rivestimenti sono surgettivi).

Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento e $E \neq \emptyset$ allora p è surgettivo.

Dimostrazione.

Se $E \neq \emptyset$ allora esiste $\tilde{x} \in E$. Sia $x = p(\tilde{x})$. La sua fibra non è vuota (in particolare contiene \tilde{x}), dunque $|p^{-1}(x)| \geq 1$. Per il Teorema delle fibre (3.64) avremo $|p^{-1}(z)| \geq 1$ per ogni $z \in X$. In particolare per ogni $z \in X$ esiste $\tilde{z} \in E$ tale che $p(\tilde{z}) = z$, cioè p è surgettiva. □

Definizione 3.68 (Rivestimento banale).

Un rivestimento è **banale** se ha grado 1.

Osservazione 3.69.

Un rivestimento è un omeomorfismo locale surgettivo, ma non vale l'implicazione opposta.

Esempio 3.70.

La retta con doppia origine e $(0, 5) \xrightarrow{t} S^1$ $\xrightarrow{t} e^{2\pi it}$ sono omeomorfismi locali surgettivi ma non sono rivestimenti, per esempio perché il grado non è ben definito.

Concludiamo la sezione fornendo un modo per trovare rivestimenti

Teorema 3.71 (Rivestimento da azione propriamente discontinua).

Sia $G \curvearrowright X$ una azione propriamente discontinua tale che X/G sia connesso. Allora $\pi : X \rightarrow X/G$ è un rivestimento.

Dimostrazione.

Sia $x_0 \in X/G$ e sia $\tilde{x} \in X$ un suo rappresentante. Per definizione di azione propriamente discontinua, esiste un intorno W di \tilde{x} aperto tale che $gW \cap W = \emptyset$ per ogni $g \in G \setminus \{1_G\}$. Poniamo $U = \pi(W)$, il quale è aperto perché le proiezioni rispetto ad azioni sono aperte (2.344), e contiene x_0 per la scelta di \tilde{x} . Mostriamo che U è ben rivestito.

★) Osserviamo che

$$\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{g \in G} gW.$$

Poiché l'azione è propriamente discontinua $gW \cap hW = g(W \cap g^{-1}hW) = g(\emptyset) = \emptyset$, quindi

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{g \in G} gW.$$

★) Osserviamo che $\pi|_{gW} : gW \rightarrow U$ è continua e aperta in quanto restrizione di una mappa continua e aperta ad un aperto. Per concludere dobbiamo mostrare che è bigettiva:

Iniettiva) Siano $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in gW$ tali che $\pi(\tilde{x}_1) = \pi(\tilde{x}_2)$. Per definizione della proiezione si deve avere che $\tilde{x}_1 = h\tilde{x}_2$ per qualche $h \in G$. Si ha dunque che

$$gW \ni \tilde{x}_1 = h\tilde{x}_2 \in h(gW),$$

in particolare $gW \cap hgW \neq \emptyset \implies h = 1_G$, dunque $\tilde{x}_1 = 1_G\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2$.

Surgettiva) Per definizione $U = \pi(W) = \pi(gW)$ in quanto π identifica traslati. \square

Osservazione 3.72 (Grado rivestimenti derivanti da propriamente discontinue). Un'azione propriamente discontinua è libera, quindi le orbite sono in bigezione con G . Dato che le orbite corrispondono a fibre, il grado di un rivestimento ottenuto da una azione propriamente discontinua è $|G|$.

Osservazione 3.73 (Rivestimento di proiettivi reali).

Consideriamo la proiezione che identifica gli antipodali

$$\pi : S^n \rightarrow S^n / \{\pm id\} \cong \mathbb{P}^n \mathbb{R}.$$

L'azione $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ corrispondente è propriamente discontinua e come sappiamo $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ è connesso. Segue che l'identificazione antipodale è un rivestimento di grado 2 di $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$.

3.4.3 Sollevamenti

I rivestimenti ci permettono di prendere funzioni a valori nello spazio base e di “sollevarle” a funzioni nello spazio totale. Questo ci permette di evidenziare differenze difficili da esplicitare nello spazio base.

Definizione 3.74 (Sollevamento).

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento e sia $f : Y \rightarrow X$ una funzione continua data. Un **sollevamento** di f è una funzione continua $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ tale che $f = p \circ \tilde{f}$, cioè fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Teorema 3.75 (Unicità del sollevamento).

Siano $p : E \rightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \rightarrow X$ funzione continua fissata con Y connesso. Se \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 sono due sollevamenti di f che coincidono in un punto allora $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

Dimostrazione.

Poiché Y è connesso, basta mostrare che

$$\Omega = \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$$

è sia chiuso che aperto (è non vuoto perché per ipotesi \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 coincidono in qualche punto).

Ω aperto) Vogliamo mostrare che Ω è intorno di ogni suo punto. Sia allora $y \in \Omega$ tale che $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) = \tilde{x}$ e sia U un intorno aperto ben rivestito di $\tilde{x} = p(\tilde{x}) = f(y)$. Abbiamo cioè che

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i.$$

Per costruzione esiste $i_0 \in I$ tale che $\tilde{x} \in W_{i_0}$. Per continuità di \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 abbiamo che

$$V = \tilde{f}_1^{-1}(W_{i_0}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(W_{i_0}) \ni y$$

è un intorno aperto di y in Y tale che $\tilde{f}_1(V) \subseteq W_{i_0}$ e $\tilde{f}_2(V) = W_{i_0}$.

Per concludere basta mostrare che $V \subseteq \Omega$. Dato che $p|_{W_{i_0}}$ è un omeomorfismo, è in particolare iniettiva, quindi per ogni $z \in V$ abbiamo che

$$p(\tilde{f}_1(z)) = f(z) = p(\tilde{f}_2(z)) \implies \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z),$$

cioè $z \in \Omega$.

Ω chiuso) Mostriamo che $Y \setminus \Omega = \Omega^c$ è intorno di ogni suo punto. Sia $y \in \Omega^c$, cioè $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$. Dato che $\tilde{f}_1(y)$ e $\tilde{f}_2(y)$ appartengono alla fibra di $\tilde{x} = f(y)$ tramite p si deve avere che se U è un intorno ben rivestito di \tilde{x} , e quindi

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i,$$

allora $\tilde{f}_1(y) \in W_{i_1}$ e $\tilde{f}_2(y) \in W_{i_2}$ con $i_1 \neq i_2$.

Poniamo $V = \tilde{f}_1^{-1}(W_{i_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(W_{i_2})$, il quale è un intorno aperto di y e mostriamo che $V \subseteq \Omega^c$. Per costruzione $\tilde{f}_1(V) \subseteq W_{i_1}$ e $\tilde{f}_2(V) \subseteq W_{i_2}$, dunque

$$\tilde{f}_1(V) \cap \tilde{f}_2(V) \subseteq W_{i_1} \cap W_{i_2} = \emptyset,$$

cioè $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)$ per ogni $z \in V$, come cercato. \square

Teorema 3.76 (Esistenza e unicità del sollevamento dei cammini).

Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un cammino tale che $\gamma(0) = x_0$ e sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento. Allora per ogni $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ esiste un unico sollevamento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$ di γ tale che $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$.

Dimostrazione.

Poiché $[0, 1]$ è connesso, l'unicità segue dal teorema di unicità (3.75). Sia \mathcal{U} un ricoprimento di X composto da aperti ben rivestiti. Per continuità di γ abbiamo che $\{\gamma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ è un ricoprimento aperto di $[0, 1]$. Poiché $[0, 1]$ è un compatto di \mathbb{R} , il ricoprimento ammette numero di Lebesgue $\varepsilon > 0$ (2.288). Scelto $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ si ha che per ogni $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subseteq \left(\frac{2k+1}{2n} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{2k+1}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \subseteq \gamma^{-1}(U_k)$$

per qualche $U_k \in \mathcal{U}$.

Fissato $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, costruiamo $\tilde{\gamma}$ definendo $\tilde{\gamma}|_{[0, \frac{k+1}{n}]}$ progressivamente su $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

$k=0$) Per quanto detto $\gamma([0, \frac{1}{n}]) \subseteq U_0$. Per definizione di rivestimento, siccome U_0 è stato scelto ben rivestito, si ha che

$$p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{i \in I} W_i.$$

Sia W'_0 l'unico aperto W_i come sopra che contiene \tilde{x}_0 . Sia $s_0 : U_0 \rightarrow W'_0$ la sezione di p corrispondente a W'_0 , cioè $s_0 = p|_{W'_0}^{-1}$. Poniamo

$$\tilde{\gamma} : \begin{array}{ccc} [0, \frac{1}{n}] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & s_0 \circ \gamma|_{[0, \frac{1}{n}]}(t) \end{array} .$$

$k > 0$) Supponiamo di aver definito $\tilde{\gamma}$ su $[0, \frac{k}{n}]$. Per come abbiamo definito n si ha che esiste un aperto ben rivestito U_k tale che $\gamma([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]) \subseteq U_k$. Sia W'_k l'unico aperto nell'unione

$$p^{-1}(U_k) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$$

tale che $\tilde{\gamma}(\frac{k}{n}) \in W'_k$. Definiamo $s_k : U_k \rightarrow W'_k$ come la sezione di p adeguata e poniamo

$$\tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} : \begin{array}{ccc} [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & s_k \circ \gamma|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(t) \end{array} .$$

Per concludere l'estensione di $\tilde{\gamma}$ la aggiorniamo come segue:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}|_{[0, \frac{k}{n}]} * \tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} .$$

Dopo n passi avremo definito $\tilde{\gamma}$ continua tale che $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, come voluto. \square

Notazione 3.77.

Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento, $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ è un cammino e \tilde{x}_0 è un punto della fibra di $\alpha(0)$ allora indichiamo con $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ l'unico sollevamento di α che parte da \tilde{x}_0 .

Teorema 3.78 (Sollevamento dell'omotopia).

Siano $p : E \rightarrow X$ un rivestimento, $f : Y \rightarrow X$ continua, $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ un sollevamento di f e $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ una omotopia tale che $H(\cdot, 0) = f$. Allora esiste un (unico) sollevamento $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow E$ di H ($p \circ \tilde{H} = H$) tale che $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}$.

Dimostrazione.

Definiamo una mappa \tilde{H} su $Y \times [0, 1]$ che fa commutare il diagramma di sollevamento e mostriamo che è continua.

Definisco \tilde{H}) Dato $y \in Y$ consideriamo $\gamma_y : [0, 1] \rightarrow X$ definito da $\gamma_y(t) = H(y, t)$. Poiché $p \circ \tilde{f} = f$, il punto $\tilde{f}(y)$ appartiene alla fibra di $f(y) = \gamma_y(0)$, dunque per l'esistenza e unicità del sollevamento di cammini (3.76) esiste un unico cammino $\tilde{\gamma}_y : [0, 1] \rightarrow E$ sollevamento di γ_y tale che $\tilde{\gamma}_y(0) = \tilde{f}(y)$. Definiamo allora \tilde{H} nell'unico modo possibile:

$$\tilde{H}(y, t) = \tilde{\gamma}_y(t).$$

\tilde{H} è continua) L'idea è simile a quella per il sollevamento di cammini: mostriamo che localmente $\tilde{H} = s \circ H$ per s un'opportuna sezione di p .

Mostriamo che \tilde{H} è continua in ogni punto $(y_0, t) \in Y \times [0, 1]$, che darà la tesi per (2.77). Più propriamente mostreremo che è continua su un opportuno intorno di ogni punto.

Per ogni $t \in [0, 1]$ considero un aperto ben rivestito di X contenente $H(y_0, t)$. La preimmagine di questo, per continuità di H , è un aperto di $Y \times [0, 1]$ contenente (y_0, t) . Dato che i rettangoli sono una base per la topologia prodotto, esiste un intorno in $Y \times [0, 1]$ di (y_0, t) della forma $U_t \times V_t$ tale che U_t è un aperto di Y che contiene y_0 , V_t è un aperto di $[0, 1]$ che contiene t e $H(U_t \times V_t)$ è contenuto nell'aperto ben rivestito di partenza.

Osservando che

$$\{y_0\} \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{t \in [0, 1]} U_t \times V_t,$$

per compattezza di $\{y_0\} \times [0, 1] \cong [0, 1]$ si ha che esistono t_1, \dots, t_n tali che

$$\{y_0\} \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{t_i} \times V_{t_i}.$$

Ponendo $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ (aperto perché intersezione finita di aperti) si ha ancora che

$$\{y_0\} \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U \times V_{t_i}.$$

Dato che $U \times V_t \subseteq U_t \times V_t$ abbiamo ancora che $H(U \times V_t)$ finisce in un aperto ben rivestito.

Poiché $\{V_{t_1}, \dots, V_{t_n}\}$ è un ricoprimento aperto di $[0, 1]$, che è compatto, questo ammette un numero di Lebesgue ε (2.288). Per un opportuno $m \in \mathbb{N}$ si avrà che per ogni $k \in \{0, \dots, m-1\}$ l'intervallo $[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ è incluso in una palla di raggio ε che è inclusa in un qualche V_{t_i} , quindi

$$U \times \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right] \subseteq U \times V_{t_i}$$

per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$. In particolare $H(U \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]) \subseteq Z_k$ con Z_k aperto ben rivestito di X (quello che avevamo scelto per $\tilde{H}(y_0, t_i)$).

Per definizione di aperto ben rivestito si ha che

$$p^{-1}(Z_k) = \bigsqcup_{i \in I} W_i.$$

Osserviamo dunque che esiste un unico foglio W'_k tra questi tale che

$$\tilde{\gamma}_{y_0} \left(\frac{k}{m} \right) = H \left(y_0, \frac{k}{m} \right) \in W'_k.$$

Sia $s_k : Z_k \rightarrow W'_k$ l'inversa locale di p .

Per mostrare che \tilde{H} è continua in (y_0, t_0) è sufficiente mostrare che \tilde{H} coincide con $s_k \circ H$ (composizione di continue) su una opportuna restrizione di $U \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ (che continua a contenere (y_0, t_0) per qualche k) per ogni $k \in \{0, \dots, m-1\}$.

Procediamo per induzione su k :

$k=0$) Per costruzione $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ per ogni $y \in Y$. Poiché $\tilde{H}(y_0, 0) = \tilde{\gamma}_{y_0}(0) \in W'_0$ si ha che esiste un intorno aperto $U_0 \subseteq U$ di y_0 tale che $\tilde{H}(U_0 \times \{0\}) \subseteq W'_0$ (per esempio $U_0 = U \cap \tilde{f}^{-1}(W'_0)$). A questo punto per l'unicità del sollevamento di cammini (3.76) si ha che

$$s_0 \circ H|_{U_0 \times [0, \frac{1}{m}]} = \tilde{H}|_{U_0 \times [0, \frac{1}{m}]}$$

$k \implies k+1$) Per ipotesi induttiva $g(y) = \tilde{H}(y, \frac{k}{m})$ è continua su U_{k-1} . Poiché $\tilde{H}(y_0, \frac{k}{m}) = \tilde{\gamma}_{y_0}(\frac{k}{m}) \in W'_k$ si ha che esiste un intorno $U_k \subseteq U$ di y_0 tale che $\tilde{H}(U_k \times \{\frac{k}{m}\}) \subseteq W'_k$ (per esempio $U_k = U_{k-1} \cap g^{-1}(W'_k)$).

Per ogni $y \in U_k$ si ha dunque che $s_k \circ H(y, \frac{k}{m}) = \tilde{H}(y, \frac{k}{m})$. Per l'unicità dei sollevamenti di cammini (3.76) $\tilde{H} = s_k \circ H$ su $U_k \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$.

Dato che stiamo considerando un numero finito di k , restringendo opportunamente gli aperti ad ogni passo, si ha che $y_0 \in U_m$ e $\tilde{H}|_{U_m \times [0, 1]}$ è continua, in particolare è continua in (y_0, t_0) . \square

Teorema 3.79 (Sollevamento delle omotopie di cammini).

Sia $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ un'omotopia di cammini da α a β in $\Omega(X, x_0, x_1)$. Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento e fissiamo $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora H si solleva ad una omotopia di cammini da $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ a $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$. In particolare se $\alpha \simeq \beta$ come cammini allora $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ e $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ hanno lo stesso punto finale.

Dimostrazione.

Per il teorema sul sollevamento delle omotopie (3.78) possiamo sollevare H ad un'omotopia \tilde{H} tale che $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(s)$. Osserviamo che, per l'unicità del sollevamento dei cammini (3.76), siccome $H(0, t)$ è il cammino costante a x_0 , si deve avere che $\tilde{H}(0, t)$ è il cammino costante a $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0$. Similmente $\tilde{H}(1, t) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)$. Questo mostra che \tilde{H} è una omotopia a estremi fissi da $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ ad un sollevamento di $H(s, 1) = \beta(s)$ tale che $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{x}_0$, cioè $\tilde{H}(s, 1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ come voluto. \square

Corollario 3.80 (Mappa sui π_1 indotta da rivestimento).

Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento allora $p_* : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è iniettiva (abbiamo scelto \tilde{x}_0 e x_0 tali che $p(\tilde{x}_0) = x_0$).

Dimostrazione.

Mostriamo che $\ker p_* = \{[c_{\tilde{x}_0}]\}$. Sia $[\gamma] \in \pi_1(E, \tilde{x}_0)$ tale che $p_*([\gamma]) = 1$, cioè $p \circ \gamma \simeq c_{x_0}$. Per il teorema, una omotopia di cammini tra $p \circ \gamma$ e c_{x_0} si solleva ad un'omotopia di cammini che da la seguente equivalenza

$$\gamma = \widetilde{(p \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0} \simeq \widetilde{(c_{x_0})}_{\tilde{x}_0} = c_{\tilde{x}_0},$$

cioè $[\gamma] = 1$ in $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$. \square

Osservazione 3.81 (Il cerchio non è semplicemente connesso).
 $\pi_1(S^1) \neq 0$.

Dimostrazione.

Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ il loop dato da $\gamma(t) = e^{2\pi it}$. Consideriamo il rivestimento $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dato da $p(t) = e^{2\pi it}$. Sollevando γ troviamo un cammino $\tilde{\gamma}_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dato da $\tilde{\gamma}_0(t) = t$.

Supponiamo per assurdo che $[\gamma] = 1$, cioè che γ sia omotopo al cammino costante in S^1 . In tal caso per il teorema sul sollevamento delle omotopie di cammini (3.79) si dovrebbe avere che $\tilde{\gamma}_0$ è omotopo a estremi fissi al cammino costante (unico sollevamento del cammino costante). Eppure constatiamo che $\tilde{\gamma}_0(1) = 1$, mentre se fosse omotopo al cammino costante dovremmo avere $\tilde{\gamma}_0(1) = 0$. \neq \square

3.5 Azione di Monodromia

In questa sezione trattiamo una azione del gruppo fondamentale. Questa sarà una azione destra, cioè rispetta i soliti assiomi di una azione eccetto la seguente differenza nell'associatività:

$$\underbrace{(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g(h(x))}_{\text{azione sinistra}} \quad \underbrace{x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h = h(g(x))}_{\text{azione destra}}$$

Definizione 3.82 (Azione di monodromia).

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e sia $F = p^{-1}(x_0)$ la fibra di x_0 . Definiamo l'**azione di monodromia** di $\pi_1(X, x_0)$ su F come segue:

$$\begin{aligned} F \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow F \\ (\tilde{x}, [\alpha]) &\longmapsto \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \end{aligned}$$

Proposizione 3.83.

L'azione di monodromia è una azione destra.

Dimostrazione.

Buona definizione) Segue dal fatto che se $\alpha \simeq \beta$ come lacci in x_0 allora $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}}(1)$ (3.79).

Neutro fissa) Ricordiamo che l'elemento neutro del gruppo fondamentale corrisponde alla classe del cammino costante $[c_{x_0}]$. Vediamo che

$$\tilde{x} \cdot [c_{x_0}] = (\widetilde{c_{x_0}})_{\tilde{x}}(1) = c_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}.$$

Composizione) Segue per calcolo:

$$\begin{aligned} \tilde{x} \cdot ([\alpha] * [\beta]) &= \tilde{x} \cdot [\alpha * \beta] = (\widetilde{\alpha * \beta})_{\tilde{x}}(1) = \\ &= \tilde{\alpha}_{\tilde{x}} * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \cdot [\beta] = \\ &= (\tilde{x} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta], \end{aligned}$$

dove per spezzare $(\widetilde{\alpha * \beta})_{\tilde{x}}(1)$ abbiamo usato l'unicità dei sollevamenti (3.75). \square

Teorema 3.84 (Proprietà dell'azione di monodromia).

Siano $p : E \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$ e $F = p^{-1}(x_0)$ la fibra di x_0 . Si ha che

1. Se X è connesso per archi⁸ l'azione di monodromia $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright F$ è transitiva se e solo se E è connesso per archi.
2. Per ogni $\tilde{x} \in E$ si ha che

$$\text{stab}(\tilde{x}) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \mid \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x}\} = p_*(\pi_1(E, \tilde{x})).$$

Dimostrazione.

1) \Leftarrow) Dati $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$, siccome E è connesso per archi, esiste $\tilde{\alpha} \in \Omega(E, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ cammino che li connette. Poniamo $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$. Siccome $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$ abbiamo che α è un laccio su x_0 . Per l'unicità dei sollevamenti di cammini (3.76) si ha $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1} = \tilde{\alpha}$. Quindi, $\tilde{x}_1 \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1}(1) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_2$, cioè l'azione è transitiva.

\Rightarrow) Siano \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 punti di E e cerchiamo di connetterli. Poniamo $p(\tilde{x}_1) = x_1$ e $p(\tilde{x}_2) = x_2$. Siccome X è connesso per archi, esiste un cammino γ_1 da x_1 a x_0 in X , analogamente trovo un cammino da x_2 a x_0 . Solleviamo γ_1 e γ_2 in E partendo da \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 rispettivamente. Per costruzione $\tilde{y}_1 = \tilde{\gamma}_{1\tilde{x}_1}(1)$, $\tilde{y}_2 = \tilde{\gamma}_{2\tilde{x}_2}(1) \in F_{x_0}$. Siccome l'azione è transitiva esiste $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ tale che $\tilde{y}_1 \cdot [\alpha] = \tilde{y}_2$, dunque il sollevamento $\tilde{\alpha}_{\tilde{y}_1}$ è tale che $\tilde{\alpha}_{\tilde{y}_1}(1) = \tilde{y}_2$. Per concludere osserviamo che

$$\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\alpha}_{\tilde{y}_1} * \overline{\tilde{\gamma}_2}$$

è un cammino in E da \tilde{x}_1 a \tilde{x}_2 .

2) \subseteq) Sia $[\alpha] \in \text{stab}(\tilde{x})$, cioè $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$. Si ha dunque che $[\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}] \in \pi_1(E, \tilde{x})$. Per definizione di p_*

$$p_*[\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}] = [p \circ \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}] = [\alpha],$$

⁸La premessa sulla connessione per archi non è stata data a lezione ma è necessaria per la veridicità del risultato.

cioè $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$.

\supseteq) Sia $g \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$, cioè $g = p_*([\tilde{\alpha}]) = [p \circ \tilde{\alpha}]$ con $\tilde{\alpha} \in \pi_1(E, \tilde{x})$.

Poniamo $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$, allora $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ (gli estremi sono entrambi $p(\tilde{x}) = x_0$), inoltre $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}} = \tilde{\alpha}$ per unicità del sollevamento (3.76), dunque

$$\tilde{x} \cdot g = \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}.$$

□

Corollario 3.85.

Se X ammette rivestimento connesso non banale allora $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$ per ogni $x_0 \in X$, cioè X NON è semplicemente connesso.

Dimostrazione.

$\pi_1(X, x_0)$ deve agire transitivamente sulla fibra di x_0 , che ha più di un punto, dunque deve esistere un elemento di $\pi_1(X, x_0)$ diverso dall'identità che sposta un primo elemento della fibra in un altro. □

Corollario 3.86.

Ogni rivestimento connesso di uno spazio semplicemente connesso è banale, cioè è un omeomorfismo.

Corollario 3.87.

S^1 e $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ non sono semplicemente connessi.

Dimostrazione.

Hanno rivestimenti connessi non banali, l'elica e l'identificazione antipodale. □

Sollevamento di mappe qualsiasi

Grazie alle proprietà dell'azione di monodromia possiamo dare una caratterizzazione esatta di quando le mappe ammettono sollevamento:

Teorema 3.88 (Sollevamento di mappe qualsiasi).

Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento e fissiamo $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sia $f : Y \rightarrow X$ continua e $y_0 \in Y$ tale che $f(y_0) = x_0$.

Supponiamo che Y sia connesso e localmente connesso per archi, allora

$$\exists! \tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X} \text{ t.c. } \tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0, p \circ \tilde{f} = f \iff f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

Dimostrazione.

\implies) Supponiamo che \tilde{f} esista. Se $f = p \circ \tilde{f}$ allora $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$, dunque

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

\impliedby) Supponiamo che \tilde{f} esista. Per ogni $y \in Y$ sia $\gamma \in \Omega(Y, y_0, y)$. Osserviamo che $f \circ \gamma$ è un cammino in X da x_0 a $f(y)$, inoltre $\tilde{f} \circ \gamma$ è l'unico sollevamento di $f \circ \gamma$ che parte da \tilde{x}_0 (3.76). Si ha dunque che

$$\tilde{f}(y) = \tilde{f}(\gamma(1)) = \widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1),$$

dove $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}$ è l'unico sollevamento di $f \circ \gamma$ che parte da \tilde{x}_0 .

Unicità) È l'unicità dei sollevamenti (3.75).

Esistenza) Dato ciò che abbiamo detto sull'unicità, diamo l'unica definizione possibile di $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$:

per ogni $y \in Y$ sia $\gamma \in \Omega(Y, y_0, y)$ e sia $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}$ l'unico sollevamento di $f \circ \gamma$ che parte da \tilde{x}_0 . Poniamo $\tilde{f}(y) = \widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1)$.

Buona definizione) Dobbiamo mostrare che \tilde{f} non dipende da γ . Sia $\gamma_1 \in \Omega(Y, y_0, y)$, allora $\gamma * \gamma_1$ è un laccio in Y con punto base y_0 . Osserviamo che

$$[f \circ \gamma * \overline{(f \circ \gamma_1)}] = f_*([\gamma * \bar{\gamma}_1]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \stackrel{\text{ipotesi}}{\subseteq} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \stackrel{(3.84)}{=} \text{stab}(\tilde{x}_0),$$

dove lo stabilizzatore è considerato rispetto all'azione di monodromia. Si ha dunque che $f \circ \gamma * \overline{(f \circ \gamma_1)}$ si solleva a un laccio in \tilde{X} con punto base \tilde{x}_0 . In particolare

$$\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1) = \widetilde{(f \circ \bar{\gamma}_1)}_{\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1)}(0) \stackrel{(3.75)}{=} \widetilde{(f \circ \gamma_1)}_{\tilde{x}_0}(1).$$

$p \circ \tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$) Se $\gamma \in \Omega(Y, y_0, y)$ si ha

$$p(\tilde{f}(y)) = p(\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1)) = f \circ \gamma(1) = f(y).$$

Dato che c_{y_0} è un cammino da y_0 a y_0 in Y , $\tilde{f}(y_0) = \widetilde{c_{y_0}}_{\tilde{x}_0}(1) = c_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$.

Continuità) Mostriamo che \tilde{f} è continua in y per ogni $y \in Y$. Cerchiamo un intorno di y dove \tilde{f} è continua.

Sia U un intorno ben rivestito di $f(y)$ in X per p e siano \tilde{U} la componente connessa per archi di $p^{-1}(U)$ contenente $\tilde{f}(y)$ e V la componente connessa per archi di $f^{-1}(U)$ contenente y . Poiché p è un rivestimento e U è ben rivestito si ha che \tilde{U} è aperto e $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ è un omeomorfismo. Poiché f è continua e Y è localmente connessi per archi, si ha per (2.221) che V è un aperto connesso per archi.

Vogliamo mostrare che $\tilde{f}|_V$ è continua. Osserviamo che se \tilde{f} manda connessi per archi in connessi per archi allora

$$\tilde{f}(y) \in \tilde{f}(V) \cap \tilde{U} \neq \emptyset \implies \tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$$

e quindi $p \circ \tilde{f}|_V = p|_{\tilde{U}} \circ \tilde{f}|_V$, da cui

$$f|_V = p \circ \tilde{f}|_V = p|_{\tilde{U}} \circ \tilde{f}|_V \implies \tilde{f}|_V = p|_{\tilde{U}}^{-1} \circ f|_V,$$

che è continua perché composizione di continue.

Dimostriamo dunque che \tilde{f} manda connessi per archi in connessi per archi:

Se $V \subseteq Y$ è connesso per archi, per $y_1, y_2 \in V$ consideriamo $\gamma_0 \in \Omega(Y, y_0, y_1)$ e $\gamma_1 \in \Omega(Y, y_1, y_2)$ e osserviamo che $\gamma_0 * \gamma_1 \in \Omega(Y, y_0, y_2)$.

Per definizione di \tilde{f}

$$(\tilde{f} \circ \gamma_0) * (\tilde{f} \circ \gamma_1) = \tilde{f} \circ (\gamma_0 * \gamma_1)$$

è il sollevamento di

$$f \circ (\gamma_0 * \gamma_1) = (f \circ \gamma_0) * (f \circ \gamma_1) \text{ che parte da } \tilde{x}_0.$$

In particolare il sollevamento di $f \circ \gamma_1$ che parte da $\tilde{f}(y_1) = \tilde{f} \circ \gamma_0(1)$ è $\tilde{f} \circ \gamma_1$, quindi $\tilde{f} \circ \gamma_1$ è un cammino da $\tilde{f}(y_1)$ a $\tilde{f}(y_2)$ contenuto in $\tilde{f}(V)$. \square

3.5.1 Applicazioni dell'azione di Monodromia

Siamo (finalmente) pronti per calcolare il gruppo fondamentale di S^1 :

Teorema 3.89 (Gruppo fondamentale del cerchio).

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ tramite l'isomorfismo

$$\psi : \begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ [\alpha] & \longmapsto & 0 \cdot [\alpha] \end{array}$$

dove il punto indica l'azione di monodromia per il rivestimento $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dato da $p(t) = e^{2\pi it}$.

Dimostrazione.

Buona definizione) La mappa ψ è ben definita perché $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

ψ è surgettivo) \mathbb{R} è connesso per archi e quindi l'azione è transitiva (3.84), cioè la nostra mappa è surgettiva.

ψ è un omomorfismo di gruppi) Osserviamo che

$$\begin{aligned} \psi([\alpha] * [\beta]) &= \psi([\alpha * \beta]) = (\widetilde{\alpha * \beta})_0(1) = \tilde{\alpha}_0 * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1) \\ \psi([\alpha]) + \psi([\beta]) &= \tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0(1). \end{aligned}$$

Notiamo che $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}$ è il sollevamento di β che parte da $\tilde{\alpha}_0(1)$. Se $\tilde{\beta}_0$ è il sollevamento di β che parte da 0, poniamo $\hat{\beta} = \tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0$. Chiaramente $\hat{\beta}(0) = \tilde{\alpha}_0(1)$, inoltre

$$p \circ \hat{\beta} = e^{2\pi i(\tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0)} = \underbrace{e^{2\pi i\tilde{\alpha}_0(1)}}_{=1} e^{2\pi i\tilde{\beta}_0} = p \circ \tilde{\beta}_0 = \beta.$$

Abbiamo quindi mostrato che $\hat{\beta} = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}$ per l'unicità dei sollevamenti di cammini (3.76), dunque, valutando in 1,

$$\tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1).$$

ψ iniettivo) Ora che sappiamo che ψ è un omomorfismo, basta calcolare il nucleo.

$$\ker \psi = \{[\alpha] \in \pi_1(S^1, 1) \mid 0 \cdot [\alpha] = 0\} = \text{stab}(0) = p_*(\pi_1(\mathbb{R}, 0)) = \{1\}$$

dove abbiamo usato il fatto che \mathbb{R} è semplicemente connesso e le proprietà dell'azione di monodromia (3.84). \square

Osservazione 3.90.

Questo è un caso particolare del seguente risultato, che mostreremo verso la fine del capitolo (3.161):

Se $p : E \rightarrow X$ è un rivestimento con E semplicemente connesso, allora $\pi_1(X) \cong \text{Aut}(p) = \{\gamma : E \rightarrow E \mid \gamma \text{ omeomorfismo t.c. } p \circ \gamma = p\}$.

Corollario 3.91.

Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e $D \supseteq S^1$ allora S^1 non è un retratto di D .

Dimostrazione.

Se $r : D \rightarrow S^1$ fosse una retrazione, allora $i : S^1 \hookrightarrow D$ indurrebbe $i_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(D, 1)$ iniettiva (perché $r_* \circ i_* = id_{\pi_1(S^1, 1)}$), ma non esiste una mappa iniettiva da \mathbb{Z} a $\{0\}$. \square

Teorema 3.92 (Teorema di Brower).

Sia $f : D^2 \rightarrow D^2$ continua. Allora f ha un punto fisso, cioè esiste $x \in D$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione.

Per assurdo, supponiamo che esista una f senza punti fissi. Costruiamo una retrazione di D^2 su S^1 usando f .

Sia $r(x) : D^2 \rightarrow S^1$ data come segue: $r(x)$ è il punto di S^1 che incontra la semiretta con origine in $f(x)$ e passante per x (ben definita perché $f(x) \neq x$).

Vediamo che è una retrazione:

Fissa S^1) Per costruzione $r(x) = x$ per $x \in S^1$.

r continua) La semiretta che intersechiamo con S^1 è parametrizzata da $t \mapsto f(x) + t(x - f(x))$ con $t > 0$. Si ha che

$$r(x) = f(x) + t_x(x - f(x)),$$

dove t_x è l'unica soluzione positiva di

$$1 = |f(x) + t(x - f(x))|^2 = |f(x)|^2 + 2t(\langle f(x), x - f(x) \rangle) + t^2|x - f(x)|^2.$$

Questa è una equazione di secondo grado e data la struttura dei coefficienti è tutta roba continua in x . \square

Osservazione 3.93.

Il teorema di Brower vale per $f : D \rightarrow D$ se $D \subseteq \mathbb{R}^n$ con D convesso compatto. L'idea è più o meno la stessa sfruttando l'idea che S^{n-1} non è un retratto di D^n , però il π_1 non basta per mostrare questo fatto.

Osservazione 3.94.

Esistono $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue senza punti fissi. Più in generale esiste $f : \Omega \rightarrow \Omega$ continua senza punti fissi anche con Ω aperto, limitato e contraibile.

Esiste $f : C \rightarrow C$ continua senza punti fissi con C chiuso illimitato contraibile.

3.6 Teorema di Seifert-Van Kampen

In questa sezione e la prossima cerchiamo di rispondere alla domanda

Come calcolo i gruppi fondamentali?

Chiaramente se $X \simeq Y$, per l'invarianza omotopica del gruppo fondamentale (3.41), $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

Esempio 3.95.

S^1 è un retratto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, quindi $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Ma come calcolo il gruppo di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 1\}$ ⁹ per esempio? Si vede che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 1\}$ è omotopicamente equivalente a $S^1 \vee S^1$, ma come calcolo il gruppo fondamentale di questo Bouquet?

Un'idea può essere spezzare lo spazio che ci interessa in pezzi più gestibili. Questo approccio è incapsulato dal seguente

Teorema 3.96 (Seifert-Van Kampen).

Sia X uno spazio topologico e siano A, B aperti di X tali che $X = A \cup B$. Supponiamo che A, B e $A \cap B \neq \emptyset$ siano connessi per archi. Indichiamo le inclusioni come segue

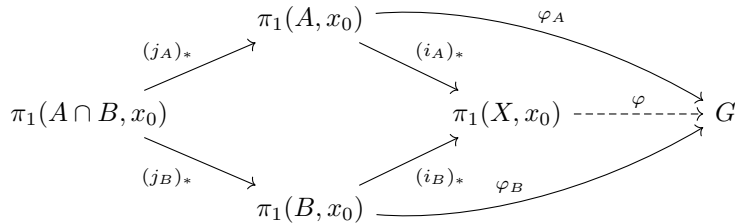
$$\begin{array}{ll} i_A : A \hookrightarrow X & j_A : A \cap B \hookrightarrow A \\ i_B : B \hookrightarrow X & j_B : A \cap B \hookrightarrow B \end{array}$$

Fissiamo $x_0 \in A \cap B$.

Sia G un gruppo e siano $\varphi_A : \pi_1(A, x_0) \rightarrow G$ e $\varphi_B : \pi_1(B, x_0) \rightarrow G$ tali che

$$\varphi_A \circ (j_A)_* = \varphi_B \circ (j_B)_* : \pi_1(A \cap B, x_0) \rightarrow G.$$

Allora esiste un unico omomorfismo $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ tale che $\varphi_A = \varphi \circ (i_A)_*$ e $\varphi_B = \varphi \circ (i_B)_*$, cioè esiste un'unica φ che fa commutare il seguente diagramma¹⁰



Inoltre $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$ e $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$.

Dimostrazione.

Primo passo Mostriamo che $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$ e $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$.

Consideriamo $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. L'obiettivo è definire $\varphi([\alpha]) \in G$. Per distinguere la classe di α in $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_1(A, x_0)$ o $\pi_1(B, x_0)$ scriviamo $[\alpha]_X$, $[\alpha]_A$ o $[\alpha]_B$ rispettivamente.

Se $\text{Imm } \alpha \subseteq A$ allora

$$[\alpha]_X = (i_A)_*([\alpha]_A),$$

quindi basta porre $\varphi([\alpha]_X) = \varphi_A([\alpha]_A)$ (questa è l'unica possibilità per far commutare il digramma). Analogamente per il caso $\text{Imm } \alpha \subseteq B$.

⁹Sto identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} .

¹⁰Il teorema afferma che $\pi_1(X, x_0)$ con le mappe date è il coprodotto fibrato di $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$ rispetto a $\pi_1(A \cap B, x_0)$ nella categoria Grp . In termini più adatti al corso, vedremo che ne è il prodotto amalgamato perché rispetta la proprietà universale (3.111).

L'idea è suddividere $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ in pezzi contenuti interamente in A o interamente in B . Per ogni $x \in X$ fissiamo un cammino γ_x tale che:

$$\gamma_x \in \begin{cases} \{c_{x_0}\} & x = x_0 \\ \Omega(A \cap B, x_0, x) & x \in A \cap B \setminus \{x_0\} \\ \Omega(A, x_0, x) & x \in A \setminus B \\ \Omega(B, x_0, x) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

Useremo i γ_x per spezzare α a meno di omotopia a estremi fissi in lacci contenuti interamente in A o B . Se avremo successo, dato che φ dovrà essere un omomorfismo che fa commutare il diagramma, avremo definito univocamente $\varphi([\alpha])$ se ben definita.

Dato $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, sappiamo che $\{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$ è un ricoprimento aperto di $[0, 1]$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n}$ sia un numero di Lebesgue (2.288), cioè

$$\alpha \left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \right) \subseteq A \text{ oppure } B$$

per ogni $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Poniamo

$$x_k = \alpha \left(\frac{k}{n} \right), \quad \alpha_k = \gamma_{x_k} * \alpha|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]} * \bar{\gamma}_{x_{k+1}}.$$

Per costruzione $\text{Imm } \alpha_k$ è contenuta interamente in A o B , inoltre $x_0 = x_n$ perché α laccio.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \alpha_0 * \dots * \alpha_{n-1} &= (c_{x_0} * \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * \bar{\gamma}_{x_1}) * \dots * (\gamma_{x_{n-1}} * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} * \bar{c}_{x_0}) \stackrel{\text{Estr.Fix.}}{\simeq} \\ &\simeq c_{x_0} * \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * c_{x_1} * \alpha|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} * \dots * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} * \bar{c}_{x_0} \simeq \\ &\simeq \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * \alpha|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} * \dots * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} = \alpha. \end{aligned}$$

Quindi $[\alpha]_X = [\alpha_0 * \dots * \alpha_{n-1}] = [\alpha_0]_X * \dots * [\alpha_{n-1}]_X$. Per costruzione $\text{Imm } \alpha_j$ è contenuta in A o B , quindi

$$[\alpha_j]_X = (i_A)_*([\alpha_j]_A) \quad \text{oppure} \quad [\alpha_j]_X = (i_B)_*([\alpha_j]_B).$$

In particolare $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$ e $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$.

Secondo passo) Osserviamo che se una φ come nella tesi esiste allora essa è univocamente determinata: dato $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, scriviamo $\alpha \simeq \alpha_1 * \dots * \alpha_n$ con $\alpha_j \in \Omega(A, x_0) \cup \Omega(B, x_0)$, a quel punto

$$[\alpha]_X = (i_{A,B})_*([\alpha_1]) * \dots * (i_{A,B})_*([\alpha_n]),$$

dove

$$(i_{A,B})_*([\alpha_j]) = \begin{cases} (i_A)_*([\alpha_j]_A) & \alpha_j \in \Omega(A, x_0) \\ (i_B)_*([\alpha_j]_B) & \alpha_j \in \Omega(B, x_0) \end{cases}$$

A questo punto, φ esiste,

$$\varphi([\alpha]_X) = \varphi((i_{A,B})_*([\alpha_1])) * \dots * \varphi((i_{A,B})_*([\alpha_n])) = \varphi_{A,B}([\alpha_1]) * \dots * \varphi_{A,B}([\alpha_n]).$$

Terzo passo) Preso $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ scriviamo

$$[\alpha]_X = (i_{A,B})_*([\alpha_1]) * \cdots * (i_{A,B})_*([\alpha_n])$$

e poniamo

$$\varphi([\alpha]_X) = \varphi_{A,B}([\alpha_1]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_n]).$$

Dobbiamo verificare che è una buona definizione, ovvero vogliamo

1. Se $\alpha_i \in \Omega(A \cap B, x_0)$ allora $\varphi_A([\alpha_i]_A) = \varphi_B([\alpha_i]_B)$
2. Due suddivisioni diverse di α forniscono lo stesso valore di $\varphi([\alpha])$
3. Se $\beta \simeq \alpha$ allora la costruzione fornisce lo stesso valore di φ
4. φ è un omomorfismo
5. φ rende commutativo il diagramma.

1) Se $\alpha_i \in \Omega(A \cap B, x_0)$ allora $[\alpha_i]_A = (j_A)_*([\alpha_i]_{A \cap B})$ per definizione di $(j_A)_*$. Similmente per B . Allora

$$\varphi_A([\alpha_i]_A) = \varphi_A \circ (j_A)_*([\alpha_i]_{A \cap B}) = \varphi_B \circ (j_B)_*([\alpha_i]_{A \cap B}) = \varphi_B([\alpha_i]_B),$$

dove abbiamo usato le ipotesi sulla commutatività del diagramma in partenza.

2) Due suddivisioni diverse $\{t_{a_1}, \dots, t_{a_n}\}$ e $\{t_{b_1}, \dots, t_{b_m}\}$ di $[0, 1]$ con un numero finito di punti ammettono un raffinamento comune (per esempio l'unione). Siccome un raffinamento si può ottenere iterativamente aggiungendo un punto alla volta, basta far vedere che se aggiungiamo un punto $\bar{x} = \alpha(\bar{t})$ compreso tra $x_k = \alpha(t_k)$ e $x_{k+1} = \alpha(t_{k+1})$ otteniamo lo stesso valore per φ .

Senza perdita di generalità supponiamo che $\alpha([t_k, t_{k+1}]) \subseteq A$ (se fosse contenuto in B il ragionamento è analogo). Poniamo

$$\beta_1 = \gamma_{x_n} * \alpha|_{[t_k, \bar{t}]} * \bar{\gamma}_{\bar{x}}, \quad \beta_2 = \gamma_{\bar{x}} * \alpha|_{[\bar{t}, t_{k+1}]} * \bar{\gamma}_{x_{k+1}}.$$

Abbiamo visto che

$$\beta_1 * \beta_2 \simeq \gamma_{x_n} * \alpha|_{[t_k, t_{k+1}]} * \bar{\gamma}_{x_{k+1}} = \alpha_k.$$

Per costruzione, $\beta_1, \beta_2, \alpha_k \in \Omega(A, x_0)$. Siccome φ_A è un omomorfismo

$$\varphi_A([\alpha_k]_A) = \varphi_A([\beta_1]_A * [\beta_2]_A) = \varphi_A([\beta_1]_A) * \varphi_A([\beta_2]_A).$$

Osserviamo dunque che il valore di φ della suddivisione di partenza (senza \bar{x}) è

$$\varphi([\alpha]_X) = \varphi_{A,B}([\alpha_0]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_{k-1}]) * \varphi_A([\alpha_k]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_{n-1}]),$$

mentre usando la suddivisione con \bar{x} troviamo

$$\varphi([\alpha]_X) = \varphi_{A,B}([\alpha_0]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_{k-1}]) * \varphi_A([\beta_1]_A) * \varphi_A([\beta_2]_A) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_{n-1}]),$$

ma per quanto detto queste espressioni in realtà coincidono.

3) Sia $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ una omotopia di cammini da α a β . Per compattezza di $[0, 1] \times [0, 1]$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n}$ è un numero di Lebesgue per il ricoprimento $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$ (2.288). In particolare

$$H \left(\left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n} \right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \right) \subseteq A \text{ oppure } B \quad \forall h, k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Poniamo $\delta_{k/n}(s) = H(s, \frac{k}{n})$, in modo che $\delta_0 = \alpha$, $\delta_1 = \beta$, $\delta_{k/n} \in \Omega(X, x_0)$ e $\delta_{k/n}|_{[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}]} \subseteq A$ oppure B ¹¹. Per concludere vogliamo mostrare che per ogni k

$$\varphi([\delta_{k/n}]) = \varphi([\delta_{(k+1)/n}]).$$

Guardando la figura¹², un modo per farlo può essere estendere entrambi in modo che abbiano gli stessi estremi sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ e provare gradualmente a trasformare un cammino nell'altro.

A questo fine osserviamo che

$$\varphi([c_{x_0} * \delta_{k/n}]) = \varphi([\delta_{k/n}]) \quad e \quad \varphi([\delta_{(k+1)/n} * c_{x_0}]) = \varphi([\delta_{(k+1)/n}]),$$

dove abbiamo staccato il cammino con la definizione di φ e usato il fatto che $[c_{x_0}] = 1 \in \pi_1(A \cap B, x_0)$ e che $(i_A)_*$, $(i_B)_*$, $(j_A)_*$ e $(j_B)_*$ sono omomorfismi di gruppi.

Vogliamo quindi mostrare che

$$\varphi([c_{x_0} * \delta_{k/n}]) = \varphi([\delta_{(k+1)/n} * c_{x_0}]).$$

Per alleggerire la notazione scriviamo $\gamma = \delta_{(k+1)/n} * c_{x_0}$ e $\eta = c_{x_0} * \delta_{k/n}$.

Siano

$$x_j = \delta_{k/n} \left(\frac{j}{n} \right) \quad e \quad y_j = \delta_{(k+1)/n} \left(\frac{j}{n} \right)$$

i vertici delle immagini dei quadrati $[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Geometricamente i punti x_j corrispondono ai vertici lungo γ e i y_j a quelli lungo η .

Suddividiamo γ e η tagliandoli in corrispondenza di questi punti:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 * \dots * \gamma_{n-1} * c_{x_0} \\ \eta &= c_{x_0} * \eta_0 * \dots * \eta_{n-1}. \end{aligned}$$

Poiché $\frac{1}{n}$ è un numero di Lebesgue per $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$, si ha che $\text{Imm } \gamma_j$ e $\text{Imm } \eta_j$ sono contenuti interamente in A oppure B per ogni j .

Per mostrare che φ non cambia da γ a η mostriamo il seguente

Claim: Se percorro γ fino ad un vertice x_j , scendo lungo il lato sinistro del quadrato $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ a y_j e poi proseguo lungo η , oppure se proseguo su γ fino a x_{j+1} e poi scendo lungo il lato destro dello stesso quadrato, si ha che φ valutata su entrambi questi cammini non cambia.

Mostrare il claim conclude, perché partendo da γ posso trasformarlo in η dopo n applicazioni, una volta per quadrato $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$.

Chiamiamo i lati citati nel claim con ω e ε , cioè

$$\omega = H(x_j, \cdot)|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}, \quad \varepsilon = H(x_{j+1}, \cdot)|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}.$$

Il claim sostiene che

$$\begin{aligned} &\varphi([\gamma_0 * \dots * \gamma_j * \omega * \eta_{j+1} * \eta_{j+2} * \dots * \eta_{n-1}]) = \\ &= \varphi([\gamma_0 * \dots * \gamma_j * \gamma_{j+1} * \varepsilon * \eta_{j+2} * \dots * \eta_{n-1}]). \end{aligned}$$

¹¹Sono le immagini di $[0, 1] \times \{\frac{h}{n}\}$, cioè abbiamo affettato l'omotopia orizzontalmente

¹²che purtroppo dovrete disegnarvi. Mi dispiace.

Ricordando che γ_x indica un cammino da x_0 a x che resta contenuto in A se $x \in A$ e similmente per $x \in B$ e $x \in A \cap B$, poniamo

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_i &= \gamma_{x_i} * \gamma_i * \bar{\gamma}_{x_{i+1}}, \\ \tilde{\eta}_i &= \gamma_{y_i} * \eta_i * \bar{\gamma}_{y_{i+1}}.\end{aligned}$$

Similmente poniamo

$$\tilde{\omega} = \gamma_{x_j} * \omega * \bar{\gamma}_{y_j}, \quad \tilde{\varepsilon} = \gamma_{x_{j+1}} * \varepsilon * \bar{\gamma}_{y_{j+1}}.$$

Per definizione di φ si ha

$$\begin{aligned}\varphi([\gamma_0 * \cdots * \gamma_j * \omega * \eta_{j+1} * \eta_{j+2} * \cdots * \eta_{n-1}]_X) &= \\ = \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_0]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_j]) * \\ &\quad * \varphi_{A,B}([\tilde{\omega}]) * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{j+1}]) * \\ &\quad * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{j+2}]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{n-1}])\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi([\gamma_0 * \cdots * \gamma_j * \gamma_{j+1} * \varepsilon * \eta_{j+2} * \cdots * \eta_{n-1}]_X) &= \\ = \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_0]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_j]) * \\ &\quad * \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_{j+1}]) * \varphi_{A,B}([\tilde{\varepsilon}]) * \\ &\quad * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{j+2}]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{n-1}]),\end{aligned}$$

dove $\varphi_{A,B}$ si comporta come φ_A se viene applicato ad una classe in $\pi_1(A, x_0)$ e come φ_B se viene applicato ad una classe in $\pi_1(B, x_0)$.

Ci siamo ricondotti a dover mostrare

$$\varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_j]) * \varphi_{A,B}([\tilde{\varepsilon}]) = \varphi_{A,B}([\tilde{\omega}]) * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_j]).$$

Dato che $\frac{1}{n}$ è un numero di Lebesgue per $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$ si ha che

$$H \left(\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \right) \subseteq A \text{ oppure } B,$$

senza perdita di generalità supponiamo A .

Siccome $H|_{\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}$ ha immagine in A e $\gamma_j * \varepsilon$ e $\omega * \eta_j$ sono immagini di cammini complementari su $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, per il lemma sui cammini complementari (3.29) si ha che H induce una omotopia a estremi fissi in A tra $\gamma_j * \varepsilon$ e $\omega * \eta_j$. Da questa segue che

$$\tilde{\gamma}_j * \tilde{\varepsilon} \simeq \gamma_{x_j} * \gamma_j * \varepsilon * \bar{\gamma}_{y_{j+1}} \simeq \gamma_{x_j} * \omega * \eta_j * \bar{\gamma}_{y_{j+1}} \simeq \tilde{\omega} * \tilde{\eta}_j,$$

in $\Omega(A, x_0)$, in particolare le loro classi in $\pi_1(A, x_0)$ coincidono. Allora

$$\varphi_A([\tilde{\gamma}_j * \tilde{\varepsilon}]_A) = \varphi_A([\tilde{\omega} * \tilde{\eta}_j]_A),$$

e siccome φ_A è un omomorfismo

$$\varphi_A([\tilde{\gamma}_k]_A) * \varphi_A([\tilde{\varepsilon}]_A) = \varphi_A([\tilde{\omega}]_A) * \varphi_A([\tilde{\eta}_k]_A)$$

come voluto.

4) Se $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, ogni sottoarco delle suddivisioni di α, β fornisce una suddivisione di $\alpha * \beta$, quindi per come è definito φ abbiamo

$$\varphi([\alpha * \beta]) = \text{suddividi} = \varphi([\alpha])\varphi([\beta])$$

5) Per costruzione $\varphi \circ (i_A)_* = \varphi_A$, perché se $\alpha \in \Omega(A, x_0)$ allora $[\alpha]_X = (i_A)_*([\alpha]_A)$ e usando la suddivisione banale $\varphi((i_A)_*([\alpha]_A)) = \varphi_A([\alpha]_A)$. Analogamente per B . \square

Corollario 3.97 (Divisione in semplicemente connessi con intersezione connessa per archi implica semplicemente connesso).

Sia $X = A \cup B$ con A, B semplicemente connessi e $A \cap B$ connesso per archi. Allora X è semplicemente connesso.

Dimostrazione.

Siamo nelle ipotesi del Teorema di Seifert-Van Kampen (3.96), quindi $\pi_1(X, x_0)$ è generato da due immagini di gruppi banali, cioè è banale. \square

Corollario 3.98.

S^n è semplicemente connesso per $n \geq 2$.

Dimostrazione.

Dividiamo S^n in S^n meno il polo nord e S^n meno il polo sud. L'intersezione è S^n meno due punti, che è connessa per archi e i due pezzi citati sono omeomorfi a \mathbb{R}^n , che è contraibile. ¹³ \square

3.7 Calcolo del Gruppo fondamentale

3.7.1 Gruppo fondamentale del prodotto

Teorema 3.99 (Gruppo fondamentale del prodotto).

Siano X, Y spazi topologici connessi per archi e siano $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Si ha che

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Dimostrazione.

Consideriamo

$$\tilde{p}: \begin{array}{ccc} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] & \longmapsto & (p_{1*}([\gamma]), p_{2*}([\gamma])) \end{array},$$

dove p_1 e p_2 sono le proiezioni di $X \times Y$ su X e Y rispettivamente. Questa mappa è evidentemente ben definita, un omomorfismo di gruppi e invertibile. \square

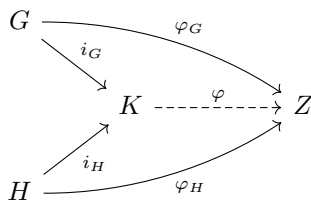
3.7.2 Prodotto libero e gruppi liberi

Definizione 3.100 (Prodotto libero).

Dati due gruppi G, H , un **prodotto libero** di G e H è un gruppo K con omomorfismi $i_G : G \rightarrow K$ e $i_H : H \rightarrow K$ tale che per ogni coppia di omomorfismi

¹³la dimostrazione fallisce per $n = 1$ perché l'intersezione non è più connessa per archi.

$\varphi_G : G \rightarrow Z$, $\varphi_H : H \rightarrow Z$ esiste un unico $\varphi : K \rightarrow Z$ tale che $\varphi_G = \varphi \circ i_G$ e $\varphi_H = \varphi \circ i_H$.



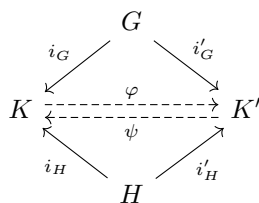
Teorema 3.101 (Esistenza del prodotto libero).

Il prodotto libero K esiste ed è unico a meno di isomorfismo. Si denota $K = G * H$.

Dimostrazione.

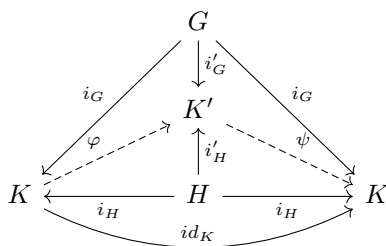
Seguiamo lo schema tipico di una dimostrazione per proprietà universale, cioè mostriamo l'unicità grazie alla proprietà universale e poi esibiamo un modello che la realizza.

Unicità) Supponiamo che K' , $i'_G : G \rightarrow K'$ e $i'_H : H \rightarrow K'$ sia un secondo prodotto libero.



Penso K' come Z e i'_G, i'_H come φ_G e φ_H . Applico la proprietà universale di K e trovo $\varphi : K \rightarrow K'$ omomorfismo di gruppi con $\varphi \circ i_G = i'_G$ e $\varphi \circ i_H = i'_H$.

Analogamente trovo $\psi : K' \rightarrow K$ omomorfismo di gruppi tale che $\psi \circ i'_G = i_G$ e $\psi \circ i'_H = i_H$. Vogliamo mostrare che φ e ψ sono inverse. Per simmetria basta mostrare una delle due composizioni. Consideriamo il diagramma



Siccome deve commutare, per l'unicità nella definizione di prodotto libero, $\psi \circ \varphi = id_K$ perché sono due percorsi che portano dal K a sinistra al K a destra.

Esistenza) Sia \mathcal{P} l'insieme delle liste finite ordinate di elementi di $G \sqcup H$, compresa la lista vuota, cioè

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (G \sqcup H)^n, \quad \text{con } (G \sqcup H)^0 = \emptyset.$$

Per semplicità notazionale indichiamo gli elementi di \mathcal{P} le liste come stringhe. Osserviamo che \mathcal{P} è un monoide associativo con il prodotto dato dalla giustapposizione.¹⁴ Definiamo su \mathcal{P} una relazione di equivalenza che lo renda un gruppo. Poniamo

$$\begin{aligned} x_1 \cdots x_{k-1} 1_G x_{k+1} \cdots x_n &\sim x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_n \\ x_1 \cdots x_{k-1} 1_H x_{k+1} \cdots x_n &\sim x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_n \\ x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1} \cdots x_n &\sim x_1 x_2 \cdots (x_k \cdot x_{k+1}) \cdots x_n, \end{aligned}$$

dove l'ultima relazione si applica se x_k e x_{k+1} appartengono allo stesso gruppo.¹⁵

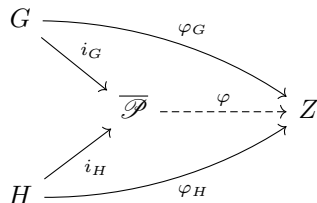
Sia $\overline{\mathcal{P}}$ il quoziente di \mathcal{P} rispetto a questa relazione. Osserviamo che se ho stringhe s_1, s_2, s'_1 e s'_2 tali che $s_1 \sim s'_1$ e $s_2 \sim s'_2$ allora $s_1 s_2 \sim s'_1 s'_2$, cioè $\overline{\mathcal{P}}$ è un monoide associativo. In realtà è un gruppo perché trovo un inverso ribaltando l'ordine degli elementi e sostituendo i termini con i loro inversi.

Per semplicità notazionale omettiamo le parentesi di classe. Ogni elemento di $\overline{\mathcal{P}}$ ha una **forma ridotta** unica, cioè un rappresentante che non contiene caratteri consecutivi nello stesso gruppo e non appaiono 1_G e 1_H . Chiaramente una forma ridotta esiste, l'unicità è più complicata ma intuitivamente evidente.

Mostriamo che $\overline{\mathcal{P}}$ è un prodotto libero. Definiamo le mappe

$$i_G : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}} \\ g & \longmapsto & g \end{array} \quad i_H : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}} \\ h & \longmapsto & h \end{array} .$$

Queste sono omomorfismi per definizione della relazione su \mathcal{P} . Mostriamo che $\overline{\mathcal{P}}$ con i_G e i_H fornisce un prodotto libero di G e H . Siano dati omomorfismi $\varphi_G : G \rightarrow Z$ e $\varphi_H : H \rightarrow Z$.



Data una stringa ridotta poniamo

$$\varphi(g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_n h_n) = \varphi_G(g_1) \varphi_H(h_1) \cdots \varphi_G(g_n) \varphi_H(h_n)$$

e analogamente per le stringhe ridotte che iniziano con elementi di H . Usando il fatto che φ_G e φ_H sono omomorfismi di gruppi, si vede che φ è un omomorfismo. Per costruzione $\varphi \circ i_G = \varphi_G$ e $\varphi \circ i_H = \varphi_H$. Infine φ è unico perché $\overline{\mathcal{P}}$ è generato da $i_G(G)$ e $i_H(H)$ e in quei punti la scelta è forzata per commutatività del diagramma. \square

Osservazione 3.102.

(NON DATA DURANTE IL CORSO) Il prodotto libero di due gruppi è il loro coprodotto nella categoria *Grp*. Intuitivamente torna abbiamo unito i due gruppi e ne abbiamo considerato il generato imponendo unicamente le relazioni di H e di G .

¹⁴Ad esempio $g_1 h_1 g_2 \cdot g_3 h_2 h_3 = g_1 h_1 g_2 g_3 h_2 h_3$.

¹⁵Ad esempio $g_1 h_1 g_2 g_2^{-1} h_1^{-1} g_1^{-1} \sim g_1 h_1 1_G h_1^{-1} g_1^{-1} \sim g_1 h_1 h_1^{-1} g_1^{-1} \sim \emptyset$.

Fatto 3.103 (Proprietà dei prodotti liberi).

Valgono le seguenti proposizioni

1. $G * \{1\} \cong G$
2. $G * H \cong H * G$
3. $(G_1 * G_2) * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$
4. Se $G \neq \{1\}$ e $H \neq \{1\}$ allora $G * H$ non è abeliano ¹⁶

Definizione 3.104 (Gruppo libero).

Il **gruppo libero** di rango n è il gruppo

$$F_n \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$$

Se x_i è un generatore dell' i -esima copia di \mathbb{Z} nel prodotto libero allora un generico elemento di F_n è dato da

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \cdots x_{i_k}^{n_k} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}, i_k \in \{1, \dots, n\}, n_i \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 3.105 (Proprietà universale del gruppo libero).

Sia X un insieme e sia $f : X \rightarrow Z$ una funzione con Z gruppo. Sia $F(X)$ il gruppo libero su X , cioè

$$F(X) = \underset{x \in X}{*} \mathbb{Z}_x,$$

dove \mathbb{Z}_x è una copia di \mathbb{Z} generata formalmente da x .

Allora esiste un unico $\varphi : F(X) \rightarrow Z$ omomorfismo di gruppi che estende f , in particolare quello dato da $\varphi(x) = f(x)$, dove interpreto l'argomento di φ come la stringa data da un solo carattere.

Dimostrazione.

La funzione $f : X \rightarrow Z$ induce una famiglia di omomorfismi $\varphi_x : \mathbb{Z}_x \rightarrow Z$ in quanto x genera \mathbb{Z}_x . Per definire φ basta separare i pezzi a secondo del generatore in x e poi usare questi omomorfismi. \square

3.7.3 Van Kampen per intersezioni semplicemente connesse

Lemma 3.106 (Van Kampen per intersezione semplicemente connessa).

Sia $X = A \cup B$ con A, B aperti connessi per archi, $A \cap B$ connesso per archi e semplicemente connesso. Sia $x_0 \in A \cap B$. Allora

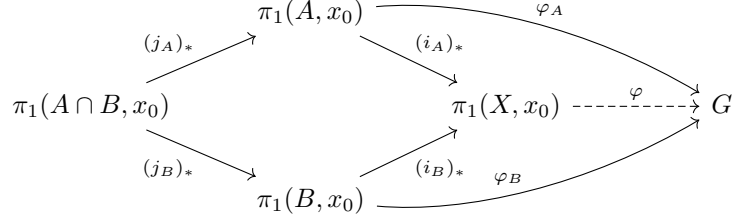
$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0).$$

Dimostrazione.

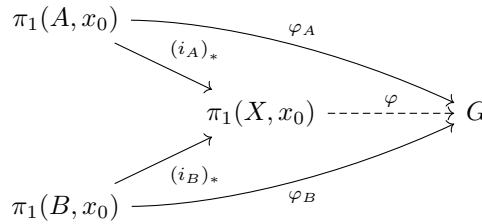
Per il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96) $\pi_1(X, x_0)$ gode della proprietà

¹⁶Per esempio, se $g \in G \setminus \{1_G\}$ e $h \in H \setminus \{1_H\}$ allora $gh \neq hg$ perché forme ridotte diverse.

universale associata al diagramma



Dato che $A \cap B$ è semplicemente connesso, $\pi_1(A \cap B, x_0) = \{1\}$, dunque il diagramma si riduce a



che è la proprietà universale del gruppo libero. □

Teorema 3.107 (Gruppo fondamentale del Bouquet di n circonferenze).

Sia $X_n = \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n \text{ volte}}$, allora

$$\pi_1(X_n) = F_n$$

Dimostrazione.

Procediamo per induzione su n .

$n = 1$) $X_n = S^1$ e $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} = F_1$.

$n > 1$) Invochiamo il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96) considerando i seguenti aperti: A intorno di una circonferenza, B intorno delle altre $n - 1$ circonferenze in modo tale che $A \cap B$ sia un intorno del punto base x_0 . Osserviamo che A si retrae per deformazione su S^1 , quindi $\pi_1(A, x_0) \cong \mathbb{Z}$, mentre B si retrae sul Bouquet di $n - 1$ circonferenze, dunque $\pi_1(B, x_0) \cong F_{n-1}$ per ipotesi induttiva. Osserviamo infine che $A \cap B$ è contraibile, dunque $\pi_1(A \cap B, x_0) = \{1\}$. Per il lemma (3.106) abbiamo

$$\pi_1(X_n, x_0) \cong \mathbb{Z} * F_{n-1} \cong F_n.$$

□

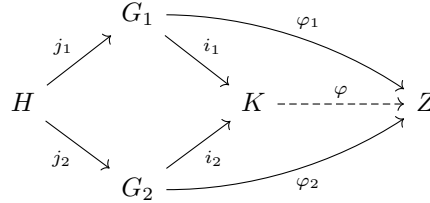
3.7.4 Prodotto amalgamato

Vogliamo generalizzare il prodotto libero in modo da poterlo usare nel calcolo anche per $A \cap B$ non semplicemente connesso.

Definizione 3.108 (Prodotto amalgamato).

Siano H, G_1, G_2 gruppi e siano $j_1 : H \rightarrow G_1$ e $j_2 : H \rightarrow G_2$ omomorfismi. Il **prodotto amalgamato** di G_1 e G_2 lungo H è un gruppo K con omomorfismi

$i_1 : G_1 \rightarrow K$ e $i_2 : G_2 \rightarrow K$ tali che $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ tali che per ogni coppia di omomorfismi $\varphi_1 : G_1 \rightarrow Z, \varphi_2 : G_2 \rightarrow Z$ con $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$ esiste un unico omomorfismo $\varphi : K \rightarrow Z$ con $\varphi \circ i_1 = \varphi_1$ e $\varphi \circ i_2 = \varphi_2$.



Spesso si scrive $K = G_1 *_H G_2$ (attenzione perché K dipende anche da j_1 e j_2).

Osservazione 3.109.

Nel caso $H = \{1\}$ si ricade nella definizione del prodotto libero.

Notazione 3.110 (Sottogruppo normale generato).

Dato un gruppo G e un sottoinsieme S poniamo

$$\langle\langle S \rangle\rangle = \bigcap_{\substack{Z \triangleleft G \\ Z \supseteq S}} Z.$$

Teorema 3.111 (Esistenza e unicità del prodotto amalgamato).

Il prodotto amalgamato esiste ed è unico a meno di isomorfismo.

Dimostrazione.

Unicità) Un altro ragionamento per proprietà universale. Una spiegazione generale di questi tipi di dimostrazione si trova nell'appendice sulla teoria delle categorie (A.19).

Esistenza) L'idea è considerare $G_1 * G_2$ (che fa commutare le parti destre del diagramma) e quozientare per le relazioni che rendono commutativo il rombo a sinistra.

Poniamo come notazione $\tilde{i}_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2, \tilde{i}_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2$ per gli omomorfismi di inclusione. Consideriamo ora il sottogruppo normale $N \triangleleft G_1 * G_2$ generato da $S = \{\tilde{i}_1(j_1(h))\tilde{i}_2(j_2(h))^{-1} \in G_1 * G_2 \mid h \in H\}$, cioè

$$N = \langle\langle S \rangle\rangle = \{\text{prodotti finiti di elementi di } S, \text{ loro coniugati e loro inversi}\}.$$

Infine poniamo $K = G_1 * G_2 / N$. Definiamo le mappe $i_1 : G_1 \rightarrow K$ e $i_2 : G_2 \rightarrow K$ come le composizioni delle inclusioni \tilde{i}_1, \tilde{i}_2 con la proiezione $\pi_N : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 * G_2 / N = K$, infatti per costruzione di K avremo $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$.

Per concludere dobbiamo mostrare che date φ_1, φ_2 come nel diagramma trovo un'unica $\varphi : K \rightarrow Z$ che fa commutare il diagramma. Per le proprietà del prodotto libero esiste un'unica $\tilde{\varphi} : G_1 * G_2 \rightarrow Z$ tale che

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi} \circ \tilde{i}_1 \quad e \quad \varphi_2 = \tilde{\varphi} \circ \tilde{i}_2.$$

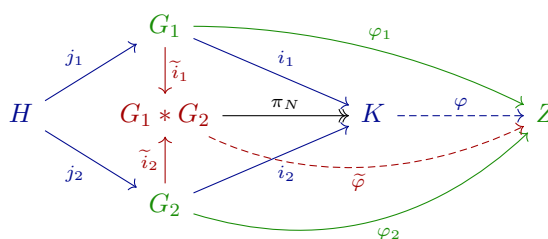
Mostriamo che $\tilde{\varphi}$ passa al quoziente in K , cioè $\tilde{\varphi}(g) = 1$ per ogni $g \in N$, ovvero $N \subseteq \ker \tilde{\varphi}$. Poiché $\ker \tilde{\varphi}$ è normale, basta verificare che $S \subseteq \ker \tilde{\varphi}$. Questo segue dal fatto che per ogni $h \in H$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\tilde{i}_1(j_1(h))\tilde{i}_2(j_2(h))^{-1}) &= \tilde{\varphi}(\tilde{i}_1(j_1(h)))\tilde{\varphi}(\tilde{i}_2(j_2(h)))^{-1} = \\ &= \varphi_1(j_1(h))\varphi_2(j_2(h))^{-1} = 1 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$, dunque $\tilde{\varphi}$ passa al quoziente definendo $\varphi : K \rightarrow Z$.

L'omomorfismo φ è unico perché ha immagini forzate su $i_1(G_1)$ e $i_2(G_2)$, che generano K in quanto K è un quoziente di $G_1 * G_2$ e $\tilde{i}_1(G_1) \cup \tilde{i}_2(G_2)$ genera $G_1 * G_2$.

Per seguire meglio i passaggi di questa dimostrazione può essere utile osservare il seguente diagramma. In blu abbiamo evidenziato le parti che riguardano solo il prodotto amalgamato, in rosso quelle che riguardano solo il prodotto libero e in verde le parti comuni ai due diagrammi.



□

Fatto 3.112.

Con le notazioni del teorema, se Ω è un insieme di generatori di H allora al posto di $S = \{j_1(h)j_2(h)^{-1} \mid h \in H\}$ si può considerare $S' = \{j_1(h)j_2(h)^{-1} \mid h \in \Omega\}$ e generare comunque N .

3.7.5 Presentazioni di gruppi

Definizione 3.113 (Presentazione).

Dato un insieme di simboli S e $R \subseteq F(S)$ (dette **relazioni**) allora

$$G = \langle S \mid R \rangle = F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle.$$

La scrittura $\langle S \mid R \rangle$ è detta **presentazione** di G .

Osservazione 3.114 (Problema della parola).

Chiedersi se una parola $w \in F(S)$ rappresenta l'identità di $\langle S \mid R \rangle$ è equivalente a chiedersi se esistono $j \in \mathbb{N}$, $w_i \in F(S)$ e $r_{k_i} \in R$ tali che

$$w = \prod_{i=1}^j w_i r_i^{\pm 1} w_i^{-1}.$$

Questo problema in generale non ammette soluzione algoritmica (non possiamo stimare quanti tentativi dovremmo fare).

Proposizione 3.115 (Proprietà universale delle presentazioni).

Siano $G = \langle S \mid R \rangle$, H un gruppo e $f : S \rightarrow H$ una funzione. Si ha che esiste un unico omomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tale che per ogni $s \in S$

$$\varphi(\bar{s}) = f(s),$$

dove \bar{s} è la classe della parola data dal solo carattere s se e solo se per ogni $s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_j}^{\varepsilon_j} \in R$ si ha

$$f(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{i_j})^{\varepsilon_j} = 1_H.$$

Dimostrazione.

\implies) Per definizione di relazione, $\bar{r} = 1_G$ per ogni $r \in R$. Se $r = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_j}^{\varepsilon_j}$ allora

$$1_H = \varphi(\bar{r}) = \varphi(\bar{s}_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots \varphi(\bar{s}_{i_j})^{\varepsilon_j} = f(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{i_j})^{\varepsilon_j}.$$

\impliedby) Per la proprietà universale del gruppo libero (3.105), f induce un omomorfismo $\tilde{f} : F(S) \rightarrow H$. Dato che

$$1_H = f(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{i_j})^{\varepsilon_j}$$

per ogni $s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_j}^{\varepsilon_j} \in R$, si ha che \tilde{f} si annulla su ogni elemento di R . Dato che $\ker \tilde{f}$ è normale, per quanto appena detto, si ha $\ker \tilde{f} \supseteq \langle\langle R \rangle\rangle$. Per il primo teorema di omomorfismo esiste un unico omomorfismo $\varphi : F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle \rightarrow H$ indotto da \tilde{f} . \square

Esempio 3.116 (Esempio del calcolo di una presentazione).

$$\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione.

La funzione $f : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ data da $f(a) = (1, 0)$ e $f(b) = (0, 1)$ rispetta la relazione che vogliamo imporre, infatti

$$f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1} = (1, 0) + (0, 1) - (1, 0) - (0, 1) = (0, 0),$$

dunque per la proprietà universale delle presentazioni (3.115) esiste un omomorfismo $\varphi : \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2$ tale che $\varphi(\bar{a}) = (1, 0)$ e $\varphi(\bar{b}) = (0, 1)$. Mostriamo che è un isomorfismo:

surgettiva) Per costruzione, l'immagine di φ contiene un insieme di generatori per \mathbb{Z}^2 . Dato che φ è un omomorfismo di gruppi questo mostra la surgettività. *iniettiva*) Osserviamo che $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ è abeliano in quanto generato da \bar{a} e \bar{b} e questi generatori commutano per costruzione. Osserviamo allora che un generico elemento di $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ si può scrivere nella forma

$$\bar{a}^m \bar{b}^n \text{ per } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Per concludere osserviamo che

$$\begin{aligned} g = \bar{a}^m \bar{b}^n \in \ker \varphi &\iff \\ \iff (0, 0) = \varphi(\bar{a}^m, \bar{b}^n) = \varphi(\bar{a})^m \varphi(\bar{b})^n = m(1, 0) + n(0, 1) = (m, n) &\iff \\ \iff m = n = 0 &\iff \\ \iff g = \bar{a}^0 \bar{b}^0 = 1, & \end{aligned}$$

cioè φ ha nucleo banale. \square

Proposizione 3.117 (Presentazione del prodotto amalgamato).

Siano $j_1 : H \rightarrow G_1$ e $j_2 : H \rightarrow G_2$ omomorfismi. Siano h_1, \dots, h_k dei generatori di H e siano $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$. Allora una presentazione di $G_1 *_H G_2$ è data da

$$G_1 *_H G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_3 \rangle,$$

dove $R_3 = \{w_i z_i^{-1} \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$, dove w_i è una parola in $F(S_1)$ che rappresenta $j_1(h_i)$ e z_i è una parola in $F(S_2)$ che rappresenta $j_2(h_i)$.

Dimostrazione.

Come notato in (3.112), basta imporre le relazioni del quoziente che definisce il prodotto amalgamato per dei generatori di H . Per definizione abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} G_1 *_H G_2 &= G_1 * G_2 / \langle\langle R_3 \rangle\rangle = \\ &= \left(F(S_1 \cup S_2) / \langle\langle R_1 \cup R_2 \rangle\rangle \right) / \langle\langle R_3 \rangle\rangle = \\ &= F(S_1 \cup S_2) / \langle\langle R_1 \cup R_2 \cup R_3 \rangle\rangle = \\ &= \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_3 \rangle. \end{aligned}$$

□

3.7.6 Rango

Definizione 3.118 (Rango).

Dato un gruppo G , il suo **rango** (che indichiamo $\text{rnk } G$) è il minimo numero di generatori di G (evitiamo questioni di buona definizione).

Esempio 3.119 (Rango di \mathbb{Z}^n).

$\text{rnk } \mathbb{Z}^n = n$.

Dimostrazione.

Osserviamo che $\text{rnk } \mathbb{Z} \leq n$, infatti \mathbb{Z}^n è generato da

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1).$$

Sia $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ un insieme di generatori. Pensandoli come vettori in \mathbb{R}^n

$$\mathbb{Z}^n = \text{Span}_{\mathbb{Z}}(v_1, \dots, v_m) \subseteq \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_m),$$

dunque $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_m) \supseteq \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{R}^n$, dunque $\{v_1, \dots, v_m\}$ genera \mathbb{R}^n e siccome $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, necessariamente $m \geq n$. □

Osservazione 3.120 (Rango e omomorfismi surgettivi).

Se $\varphi : G \rightarrow H$ è un omomorfismo di gruppi surgettivo allora $\text{rnk } G \geq \text{rnk } H$.

Osservazione 3.121 (Rango di sottogruppi può crescere).

Esistono esempi di gruppi G tali che $H \leq G$ e $\text{rnk } H > \text{rnk } G$.

Esempio 3.122 (Gruppo con sottogruppo di rango più grande).

Il gruppo libero $F_2 = \langle a, b \rangle$ ha rango 2. Per ogni $k \geq 1$ poniamo $y_k = x^k y x^{-k}$ e per $m \geq 3$ sia $G_m < F_2$ il sottogruppo generato da y_1, \dots, y_m . Si verifica che $G_m = F(\{y_1, \dots, y_m\})$, che ha rango $m > 2$.

3.7.7 Gruppi fondamentali di proiettivi

Teorema 3.123 (I proiettivi complessi sono semplicemente connessi).

$\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ è semplicemente connesso per ogni n .

Dimostrazione.

Procediamo per induzione su n .

$n = 0$) $\mathbb{P}^0\mathbb{C} = \{[0]\}$ è un punto.

$n > 0$) Supponiamo che $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ sia semplicemente connesso. Poniamo

$$A = \mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C} \setminus \{[1 : 0 : \dots : 0]\} \quad \text{e} \quad B = U_0.$$

Per costruzione $A \cup B = \mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C}$. Mostriamo che $H_0 \cong \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ è un retratto di deformazione di A :

$$K : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}((1, 0, \dots, 0)) \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}((1, 0, \dots, 0)) \\ ((x_0, \dots, x_{n+1}), t) & \longmapsto & ((1-t)x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \end{array}.$$

Osserviamo che K è una omotopia ben definita perché almeno uno tra x_1, \dots, x_{n+1} non è nullo (altrimenti il punto starebbe in $\text{Span}((1, 0, \dots, 0))$).

Se \sim è la relazione che definisce il proiettivo, sapendo che omotopie passano al quoziente (3.12), si ha che K definisce

$$\bar{K} : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{[1 : 0 : \dots : 0]\} \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{[1 : 0 : \dots : 0]\} \\ ([x_0, \dots, x_{n+1}], t) & \longmapsto & [(1-t)x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] \end{array}$$

e questa è la retrazione cercata.

Questo mostra che A è connesso per archi e semplicemente connesso in quanto $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ lo è e $A \simeq H_0 \cong \mathbb{P}^n\mathbb{C}$.

Osserviamo ora che $B = U_0 \cong \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ che è contraibile.

Infine vediamo che $A \cap B$ è connesso per archi, infatti

$$A \cap B = U_0 \setminus \{[1 : 0 : \dots : 0]\} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$$

tramite la carta J_0 e il membro di destra è chiaramente connesso per archi perché isomorfo a $\mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}$.

Per avere la tesi basta applicare il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96) e osservare che un gruppo generato da gruppi banali è banale. \square

Teorema 3.124 (Gruppi fondamentali dei proiettivi reali).

Valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{R}) &= \mathbb{Z}, \\ \pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dimostrazione.

$n = 1$) $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ è omeomorfo a S^1 .

$n \geq 2$) Considero il rivestimento di grado due $p : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dato dalla mappa antipodale. Fissiamo $[x_0] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ e sia $F = \{x_0, -x_0\}$ la sua fibra in S^n .

Se troviamo una bigezione tra $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, [x_0])$ e F allora in particolare il gruppo fondamentale avrà due elementi e un gruppo con due elementi è necessariamente isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ricordando l'azione di monodromia di $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, [x_0])$ su F , consideriamo la mappa

$$\psi : \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, [x_0]) & \longrightarrow & F \\ g & \longmapsto & x_0 \cdot g \end{array}.$$

ψ surgettiva) Poiché S^n è connesso per archi, l'azione di monodromia è transitiva (3.84), dunque ψ è surgettiva.

ψ iniettiva) Se $\psi(g_1) = \psi(g_2)$ allora $x_0g_1 = x_0g_2$, dunque $x_0 = x_0(g_2g_1^{-1})$, cioè

$$g_2g_1^{-1} \in \text{stab}(x_0) \stackrel{\text{monodromia}}{=} p_*(\pi_1(S^n, x_0)) = \{1\},$$

dove l'ultima uguaglianza segue perché S^n è semplicemente connesso (qui abbiamo usato $n \geq 2$). Dunque $g_2g_1^{-1} = 1$, cioè $g_1 = g_2$, ovvero ψ è iniettiva. \square

3.7.8 Gruppi fondamentali di superfici

Toro

Potremmo usare il fatto che $T^2 = S^1 \times S^1$ e che i gruppi fondamentali rispettano il prodotto diretto, ma preferiamo dare un'altra dimostrazione che si generalizza ad una classe più ampia di superfici.

Teorema 3.125 (Gruppo fondamentale del toro).

Si ha che

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione.

Ricordiamo che, se $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, possiamo scrivere $T^2 = Q/\sim$, dove \sim identifica lati opposti senza cambiare orientazione:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \begin{cases} x = x, y = y' & \text{oppure} \\ x = x', \{y, y'\} = \{0, 1\} & \text{oppure} \\ y = y', \{x, x'\} = \{0, 1\} \end{cases}$$

Sia $\pi : Q \rightarrow T^2$ la proiezione al quoziente per questa relazione. Vorremmo applicare il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96); definiamo allora i seguenti aperti:

$$A = T^2 \setminus \pi((1/2, 1/2)) = \pi(Q \setminus (1/2, 1/2)), \quad B = \pi((0, 1) \times (0, 1)).$$

Coprano) $A \cup B = T^2$ in quanto $\pi^{-1}(A) \cup \pi^{-1}(B) = Q$.

Primo aperto) Osserviamo che la retrazione per deformazione radiale di $Q \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ su ∂Q passa al quoziente (3.12). Osserviamo dunque che A si retrae per deformazione su $\pi(\partial Q) \cong S^1 \vee S^1$. Da questo segue che A è connesso per archi e che

$$\pi_1(A) = \pi_1(S^1 \vee S^1) = F(a, b).$$

Ricordando come abbiamo calcolato $\pi_1(S^1 \vee S^1)$, possiamo interpretare quei generatori come un laccio che fa un giro attorno la prima copia di S^1 e l'altro come un laccio che fa un giro attorno l'altra copia. Ricordando come agisce l'identificazione π , osserviamo che al laccio a corrisponde una coppia di lati opposti di ∂Q e a b l'altra coppia.

Secondo aperto) Osserviamo che $B \cong (0, 1) \times (0, 1)$ che è contraibile, in particolare è semplicemente connesso.

Intersezione) Osserviamo che

$$A \cap B \cong ((0, 1) \times (0, 1)) \setminus \{(1/2, 1/2)\} \simeq S^1,$$

dove l'equivalenza omotopica è data dal fatto che un quadrato senza un punto si retrae per deformazione su qualcosa di omeomorfo al suo bordo, che è omeomorfo a S^1 . Osserviamo dunque che $A \cap B$ è connesso per archi e $\pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$.

Se $[\alpha]$ è un laccio che genera $\pi_1(A \cap B)$ osserviamo che possiamo identificare α con una preimmagine di $aba^{-1}b^{-1}$, dove questi sono i generatori che avevamo citato prima per A . L'idea geometrica è che entrambe le espressioni rappresentano la proiezione tramite π del cammino che segue ∂Q e fa un solo giro. Gli inversi in $aba^{-1}b^{-1}$ derivano dall'orientazione relative di come identificare i lati opposti.

Per il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96), consci della definizione di prodotto amalgamato, si ha che

$$\pi_1(T^2) = \pi_1(A) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B) = F(a, b) *_{\mathbb{Z}} \{1\}.$$

Su un diagramma la situazione è la seguente

$$\begin{array}{ccc} & F_2 & \\ & \nearrow & \searrow \\ \mathbb{Z} & & ? \\ & \searrow & \nearrow \\ & \{1\} & \end{array}$$

Chiaramente j_2 è l'omomorfismo banale. Dato che \mathbb{Z} è ciclico, j_1 è univocamente determinata da $j_1(1) = j_1([\alpha])$, dove $[\alpha]$ genera $\pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$.

Per la proposizione (3.117), date le presentazioni

$$\begin{aligned} \pi_1(A) &= \langle a, b \mid \emptyset \rangle \\ \pi_1(B) &= \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle \\ \pi_1(A \cap B) &= \langle \alpha \mid \emptyset \rangle, \end{aligned}$$

osservando che $R_3 = \{j_1([\alpha])j_2([\alpha])^{-1}\}$, si ha che

$$\pi_1(T^2) \cong \langle a, b \mid j_1([\alpha])j_2([\alpha])^{-1} \rangle \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}1^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

□

Superfici con dato genere

Per ogni $g \in \mathbb{N}$ indichiamo con Σ_g la superficie compatta di genere g (cioè con g "buchi"). Per $g = 0$ e $g = 1$ si ha che Σ_g è S^2 e $S^1 \times S^1$ rispettivamente.

Fatto 3.126 (Classificazione delle superfici compatte orientabili).

*La famiglia delle Σ_g contiene tutte e sole le superfici compatte orientabili.*¹⁷

Come per il toro, possiamo scrivere ogni Σ_g in termini di un poligono quozientato per una relazione che identifica dei lati:

¹⁷Evitiamo di dare le definizioni di questi concetti.

Costruzione di Σ_g) Sia Q un $4g$ -agone e numeriamo i vertici con v_1, \dots, v_{4g} . Diamo un nome ai lati come segue:

$$a_i = v_{4i-3}v_{4i-2}, \quad b_i = v_{4i-2}v_{4i-1}, \quad c_i = v_{4i-1}v_{4i}, \quad d_i = v_{4i}v_{4i+1}.$$

Scrivendo i lati in ordine troveremmo

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, \dots, d_{g-1}, a_g, b_g, c_g, d_g.$$

Vogliamo imporre la seguente identificazione: a_i si identifica con c_i in modo tale che $v_{4i-3} \sim v_{4i}$ e $v_{4i-2} \sim v_{4i-1}$ e similmente b_i si identifica con d_i invertendo l'ordine di percorrenza del bordo.

Per rendere più chiaro come si realizzano queste identificazioni tagliamo Q con i lati v_1v_{4i+1} in modo da ottenere g pezzi.

Il primo e l'ultimo pezzo (come indice massimo del vertice presente) hanno 5 lati, mentre i pezzi centrali hanno 6 lati. In ogni pezzo, 4 lati adiacenti sono della forma a_i, b_i, c_i, d_i .

Identificando questi quattro lati come detto prima troviamo:

- per il primo e l'ultimo pezzo abbiamo un toro con un buco che ha come bordo una circonferenza
- per i pezzi in mezzo abbiamo un toro con un buco che ha come bordo un bouquet di due cerchi.

Per completare l'identificazione dobbiamo riattaccare i pezzi: il primo pezzo si attacca lungo la circonferenza che ne è il bordo al primo pezzo centrale colmando una delle due circonferenze del bouquet. Reiterando questi incollamenti attacchiamo a catena tutti i pezzi fino all'ultimo, che colma l'ultima circonferenza rimasta nel bouquet che definisce il bordo del penultimo pezzo.

Abbiamo così ottenuto una superficie senza bordo con g buchi, cioè Σ_g .

Teorema 3.127 (Gruppo fondamentale delle superfici di genere g).

Si ha che

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle,$$

dove le quadre indicano i commutatori¹⁸.

Dimostrazione.

La dimostrazione è identica a quella proposta per il toro. Riportiamo le idee chiave:

La proiezione di $Q \setminus \{\text{punto interno}\}$ si retrae per deformazione sul bouquet $S^1 \vee \dots \vee S^1$ di $2g$ copie di S^1 . La proiezione di $Q \setminus \partial Q$ è contraibile, dunque semplicemente connessa. La proiezione di $Q \setminus (\partial Q \cup \{\text{punto interno}\})$ è omotopicamente equivalente a S^1 e un generatore del suo gruppo fondamentale è omotopo in $\pi_1(Q \setminus \{\text{punto interno}\})$ a $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ (geometricamente stiamo percorrendo ∂Q e poi proiettando). La tesi segue per il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96). \square

Proposizione 3.128 (Genere determina univocamente il π_1).

Poniamo $\Gamma_g = \pi_1(\Sigma_g)$. Si ha che

$$\Gamma_g \cong \Gamma_{g'} \iff g = g'.$$

¹⁸ $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Dimostrazione.

È sufficiente mostrare che $\text{rnk } \Gamma_g = 2g$. Data la presentazione di Γ_g trovata sopra (3.127) si ha che

$$\text{rnk } \Gamma_g \leq 2g.$$

Definiamo ora $\psi : \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\} \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ con

$$\psi(a_j) = e_j, \quad \psi(b_j) = e_{g+j},$$

dove e_1, \dots, e_{2g} è la base canonica di $\mathbb{R}^{2g} \supseteq \mathbb{Z}^{2g}$. Dato che \mathbb{Z}^{2g} è abeliano

$$\underbrace{[\psi(a_1), \psi(b_1)]}_{=1} \cdots \underbrace{[\psi(a_g), \psi(b_g)]}_{=1} = 1,$$

quindi ψ induce un omomorfismo $\tilde{\psi} : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$. Osserviamo che $\tilde{\psi}$ è surgettivo perché la sua immagine contiene la base canonica, che genera \mathbb{Z}^{2g} . Questo implica (3.120) che

$$\text{rnk } (\Gamma_g) \geq \text{rnk } (\mathbb{Z}^{2g}) = 2g.$$

□

Teorema 3.129 (Genere, classe di Omotopia e π_1 sono invarianti completi).

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $g = g'$
2. $\Sigma_g \cong \Sigma_{g'}$ (omeomorfismo)
3. $\Sigma_g \simeq \Sigma_{g'}$ (equivalenza omotopica)
4. $\pi_1(\Sigma_g) \cong \pi_1(\Sigma_{g'})$

Dimostrazione.

Le implicazioni in discesa sono ovvie. $4 \implies 1$ segue dal fatto che se i gruppi sono isomorfi allora hanno lo stesso rango e quindi $2g = 2g' \implies g = g'$ (per dire che i ranghi sono $2g$ e $2g'$ abbiamo usato (3.128)). □

Fatto 3.130.

È possibile dimostrare che ogni superficie compatta non orientabile ammette un rivestimento a due fogli dato da una superficie compatta orientabile.

3.8 Rivestimento Universale

Definizione 3.131 (Rivestimento universale).

Un rivestimento $p : E \rightarrow X$ è **universale** se E è semplicemente connesso.

Esempio 3.132.

I seguenti sono rivestimenti universali

- $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ data da $p(t) = e^{2\pi it}$
- $p : \mathbb{R}^n \rightarrow (S^1)^n$ data da $p(t_1, \dots, t_n) = (e^{2\pi it_1}, \dots, e^{2\pi it_n})$
- Per $n \geq 2$, $p : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ data da $p(v) = [v]$.

Vedremo che il rivestimento universale, se esiste, è unico a meno di isomorfismo ed è definito da una proprietà universale.

Teorema 3.133 (Gruppo fondamentale e fibra nel punto sono in bigezione).

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento universale e sia $x_0 \in X$. Allora

$$|\pi_1(X, x_0)| = |p^{-1}(x_0)|.$$

Dimostrazione.

Fissiamo $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) = F$ e definiamo

$$\psi : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & F \\ \gamma & \longmapsto & \tilde{x}_0 \cdot \gamma \end{array},$$

dove il punto indica l'azione di monodromia $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright F$. Mostriamo che è una bigezione:

surgettività) Poiché E è connesso per archi, l'azione è transitiva su F (3.84), dunque ψ è surgettiva.

iniettività) Se $\psi(\gamma) = \psi(\eta)$ allora $\tilde{x}_0 \cdot \gamma = \tilde{x}_0 \cdot \eta$. Applichiamo γ^{-1} :

$$\tilde{x}_0 = (\tilde{x}_0 \cdot \gamma) \cdot \gamma^{-1} = (\tilde{x}_0 \cdot \eta) \cdot \gamma^{-1},$$

dunque $\eta * \gamma^{-1} \in \text{stab}(\tilde{x}_0) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$, dove l'ultima uguaglianza è una proprietà dell'azione di monodromia (3.84). Poiché E è semplicemente connesso $\pi_1(E, \tilde{x}_0) = \{1\}$, dunque $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = \{1\}$ e questo mostra che $\eta = \gamma$. \square

Esempio 3.134 (Gruppi fondamentali dei proiettivi).

Per $n \geq 2$ si ha che $\pi_1(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dimostrazione.

Il rivestimento $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ dato dall'identificazione antipodale è universale, dunque $|\pi_1(\mathbb{P}^n \mathbb{R})| = 2$ da cui la tesi. \square

Cerchiamo di capire quando esistono i rivestimenti universali:

Definizione 3.135 (Semilocalmente semplicemente connesso).

Uno spazio X è **semilocalmente semplicemente connesso**¹⁹ se ogni $x_0 \in X$ ammette un intorno $U \subseteq X$ tale che se $i : U \hookrightarrow X$ è l'inclusione allora $i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è l'omomorfismo banale, cioè

“ogni laccio contenuto in U è omotopicamente equivalente a c_{x_0} in X .”

Esempio 3.136 (Spazio non semilocalmente semplicemente connesso).

Consideriamo gli orecchini hawaiani

$$H = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\left\{ (x, y) \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \right\}}_{\doteq C_n} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

¹⁹altrimenti detto “non orribile” \j

Dimostrazione.

Sia U un intorno di 0 e scegliamo $n \geq 1$ tale che $C_n \subseteq U$. Sia $r : H \rightarrow C_n$ la retrazione data da $r(C_j) = \{0\}$ per ogni $j \neq n$ e $r|_{C_n} = id_{C_n}$. In particolare, se $j : C_n \rightarrow H$ è l'inclusione, $r \circ j = id_{C_n} \implies r_* \circ j_* = id_{\pi_1(C_n, 0)}$, quindi j_* è iniettiva.

Se $i : U \rightarrow H$ e $k : C_n \rightarrow U$ sono le inclusioni osserviamo che $j_* = i_* \circ k_*$, quindi i_* non può essere banale perché j_* è iniettiva e $\pi_1(C_n, 0) \cong \mathbb{Z}$. Abbiamo mostrato che H non è semilocalmente semplicemente connesso in 0 . \square

Corollario 3.137.

L'orecchino hawaiano NON è omeomorfo al bouquet di infinite circonferenze perché questo È semilocalmente semplicemente connesso.

Dimostrazione.

Il bouquet di infinite circonferenze non ha i vincoli di vicinanza imposti dall'inclusione in \mathbb{R}^2 : se consideriamo un punto diverso dal punto che abbiamo incollato possiamo trovare un intorno interamente contenuto in una circonferenza. Consideriamo dunque il punto dove abbiamo incollato le circonferenze: un intorno piccolo di questo punto può essere l'unione dei semicerchi inferiori di tutte le circonferenze. Questo intorno è chiaramente contraibile. \square

Osservazione 3.138.

Localmente semplicemente connesso implica semilocalmente semplicemente connesso.

Esempio 3.139.

Un bouquet di un numero finito di circonferenze e le varietà topologiche sono semilocalmente semplicemente connesse.

Teorema 3.140 (Esistenza dei rivestimenti universali).

X ammette un rivestimento universale se e solo se X è semilocalmente semplicemente connesso.

Dimostrazione.

\implies) Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento universale e sia $x_0 \in X$. Sia U un intorno ben rivestito di x_0 e sia $V \subseteq p^{-1}(U)$ un foglio tale che $p|_V : V \rightarrow U$ sia un omeomorfismo. Sia $g = p|_V^{-1}$. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & E \\ g \uparrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

in particolare $i_* = p_* \circ j_* \circ g_*$, ma E è semplicemente connesso, quindi $j_* = 1$, dunque $i_* = 1$, allora ogni laccio in U è omotopo al laccio banale in X .

\impliedby) [IDEA]²⁰

Fissato $x_0 \in X$, definiamo

$$E = \{\text{cammini in } X \text{ uscenti da } x_0\} / \text{omotopia di cammini}$$

²⁰Durante il corso è stata data solo un'idea di dimostrazione. La formalizzazione non è richiesta.

Osserviamo che ha senso definire una mappa $p : E \rightarrow X$ data da $p([\gamma]) = \gamma(1)$. L'idea della dimostrazione è definire una topologia su E in modo tale che p sia un rivestimento universale.

La topologia che si rivelerà vincente è la seguente:

Per ogni $[\gamma] \in E$, sia $U \subseteq X$ un intorno semplicemente connesso di $\gamma(1)$ e poniamo

$$[\gamma * U] = \{[\gamma * \eta] \mid \eta \text{ cammino in } U \text{ uscente da } \gamma(1)\}.$$

La topologia che consideriamo è quella generata da $[\gamma * U]$ al variare di U e γ . \square

3.8.1 Proprietà categoriche dei rivestimenti

Lemma 3.141 (Fattorizzazione di rivestimenti).

Dati $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, X$ connessi per archi e localmente connessi per archi, se il diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & & \\ p_1 \downarrow & \searrow \varphi & \\ X & \xleftarrow{p_2} & \tilde{X}_2 \end{array}$$

e sia p_1 che p_2 sono rivestimenti allora anche φ lo è.

Dimostrazione.

Cerchiamo un intorno ben rivestito per φ . Per concludere ci servirà mostrare che $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$ per U candidato, quindi mostriamo prima che φ è surgettiva: φ *surgettiva*) Sia $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$ qualsiasi. Fissiamo $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e siano $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$, $x_1 = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Siano $\hat{\gamma} \in \Omega(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2, \tilde{x})$ e $\gamma = p_2 \circ \hat{\gamma} \in \Omega(X, x_1, p_2(\tilde{x}))$. Sia $\tilde{\gamma}$ l'unico sollevamento di γ in \tilde{X}_1 che parte da \tilde{x}_1 . Allora

$$p_2 \circ \varphi \circ \tilde{\gamma} = p_1 \circ \tilde{\gamma} = \gamma,$$

dunque $\varphi \circ \tilde{\gamma}$ è il sollevamento di γ in \tilde{X}_2 che parte da \tilde{x}_2 per l'unicità dei sollevamenti (3.75). Da questa unicità segue che $\varphi \circ \tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$, da cui

$$\tilde{x} = \hat{\gamma}(1) = \varphi(\tilde{\gamma}(1)).$$

φ *ammette intorni ben rivestiti*) Sia $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$ qualsiasi e $x = p_2(\tilde{x}) \in X$. Siano $U_1, U_2 \subseteq X$ intorni ben rivestiti di x rispetto a p_1 e p_2 rispettivamente. Sia $V \subseteq U_1 \cap U_2$ la componente connessa per archi che contiene x e sia $U \subseteq p_2^{-1}(V)$ il foglio che contiene \tilde{x} (sono entrambi aperti per (2.221)).

Affermiamo che U è un intorno ben rivestito per φ :

Siccome U è aperto e chiuso in $p_2^{-1}(V)$ (2.219) si ha che $\varphi^{-1}(U)$ è sia aperto che chiuso in $\varphi^{-1}(p_2^{-1}(V)) = p_1^{-1}(V)$. Segue che $\varphi^{-1}(U)$ è unione disgiunta di fogli di $p_1^{-1}(V)$, infatti se così non fosse un foglio di V rispetto a p_1 non sarebbe connesso per archi e quindi non potrebbe essere omeomorfo a V .

Se U_α è uno di questi fogli (sto usando $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$) allora, poiché $p_1|_{U_\alpha}$ e $p_2|_U$ sono omeomorfismi e $p_1 = p_2 \circ \varphi$ si ha che $\varphi|_{U_\alpha}$ è un omeomorfismo da U_α a U . \square

Osservazione 3.142.

Un risultato analogo vale se p_1 e φ sono rivestimenti. Il caso per p_2 e φ rivestimenti invece vale supponendo X semilocalmente semplicemente connesso, ma non in generale.

Proposizione 3.143 (Proprietà universale del rivestimento universale).

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento universale e sia $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento con \tilde{X} connesso per archi. Fissiamo $x_0 \in X$ e siano $\hat{x}_0 \in E$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tali che $p(\hat{x}_0) = x_0 = \pi(\tilde{x}_0)$. Allora esiste un unico $\tilde{p} : E \rightarrow \tilde{X}$ rivestimento tale che $p = \pi \circ \tilde{p}$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{p} & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Dimostrazione.

L'esistenza e unicità di \tilde{p} segue immediatamente dal teorema sui sollevamenti (3.88) osservando che

$$p_*(\pi_1(E, \hat{x}_0)) \stackrel{\text{sempl.conn.}}{=} p_*(\{0\}) = \{0\} \subseteq \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Basta mostrare che \tilde{p} è un rivestimento, ma questo segue dal lemma (3.141). \square

Corollario 3.144 (Rivestimenti universali inducono omeomorfismo tra gli spazi totali).

Se $p_1 : E_1 \rightarrow X$ e $p_2 : E_2 \rightarrow X$ sono rivestimenti universali allora esiste un omeomorfismo $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ tale che

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & X \end{array}$$

Dimostrazione.

Fissati i punti base si applica la proprietà universale dei rivestimenti universali (3.143) per ottenere φ e φ^{-1} continue, cioè φ omeomorfismo. \square

Definizione 3.145 (Morfismo di rivestimenti).

Siano $p_1 : E_1 \rightarrow X$ e $p_2 : E_2 \rightarrow X$ rivestimenti. Un **morfismo** tra p_1 e p_2 è una mappa $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ continua tale che $p_2 \circ \varphi = p_1$.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & X \end{array}$$

Se esiste un morfismo $\psi : E_2 \rightarrow E_1$ tale che $\psi \circ \varphi = id_{E_1}$ e $\varphi \circ \psi = id_{E_2}$ allora φ è un **isomorfismo** di rivestimenti.

Se $E_1 = E_2$ e $p_1 = p_2$, un isomorfismo di rivestimenti è detto **automorfismo** di rivestimenti.

Osservazione 3.146.

I morfismi di rivestimenti sono chiusi per composizione e l'identità è un morfismo.

Definizione 3.147 (Automorfismi di rivestimenti).

L'insieme degli automorfismi di $p : E \rightarrow X$ è un gruppo, detto **gruppo degli automorfismi** di p , che indichiamo

$$\text{Aut}(p) = \text{Aut}_X(E) = \text{Aut}(E).$$

Osserviamo che $\varphi \in \text{Aut}(p)$ se e solo se $\varphi : E \rightarrow E$ è un omeomorfismo e $p \circ \varphi = p$.

Osservazione 3.148.

Un morfismo di rivestimenti manda fibre in fibre. In particolare gli automorfismi inducono permutazioni di una fibra in se stessa, infatti se $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ allora $p(\varphi(\tilde{x})) = p(\tilde{x}) = x$ implica $\varphi(\tilde{x}) \in p^{-1}(x)$.

Proposizione 3.149 (Azione di $\text{Aut}(p)$ e di monodromia commutano).

L'azione di monodromia e quella di $\text{Aut}(p)$ commutano, cioè per $F = p^{-1}(x_0)$, per ogni $\varphi \in \text{Aut}(p)$, $\forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, $\forall \tilde{x} \in F$

$$\varphi(\tilde{x} \cdot [\gamma]) = (\varphi(\tilde{x})) \cdot [\gamma].$$

Dimostrazione.

Sia $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ il sollevamento di $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ che parte da \tilde{x} , cioè quel sollevamento tale che

$$\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1).$$

Osserviamo che $\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ è ancora un sollevamento di γ , che parte stavolta da $\varphi(\tilde{x})$, quindi per l'unicità dei sollevamenti (3.75) abbiamo

$$\varphi(\tilde{x} \cdot [\gamma]) = \varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1) = \varphi(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)) = \varphi(\tilde{x} \cdot [\gamma]).$$

□

Isomorfismi di rivestimenti

Data l'utilità che avrà $\text{Aut}(p)$ cerchiamo di capire quando due rivestimenti sono isomorfi.

Teorema 3.150 (Caratterizzazione di rivestimenti isomorfi fissato un punto).

Siano $p_1 : E_1 \rightarrow X$ e $p_2 : E_2 \rightarrow X$ rivestimenti e fissiamo $\tilde{x}_1 \in E_1$, $\tilde{x}_2 \in E_2$ tali che $p_1(\tilde{x}_1) = x_0 = p_2(\tilde{x}_2)$. Allora esiste un isomorfismo $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ con $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se e solo se $p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2))$ in $\pi_1(X, x_0)$.

Dimostrazione.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & (E_2, \tilde{x}_2) \\ & \nearrow \varphi & \downarrow p_2 \\ (E_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_1} & (X, x_0) \end{array}$$

\implies) Se φ esiste, $p_2 \circ \varphi = p_1$, dunque

$$p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2)) = p_{2*}(\varphi_*(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1))) = p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)).$$

\impliedby) Se i due gruppi coincidono, il teorema sui sollevamenti (3.88) ci assicura l'esistenza di un morfismo $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ e un morfismo $\psi : E_2 \rightarrow E_1$. Per l'unicità dei sollevamenti (3.75) si ha che $\varphi \circ \psi = id_{E_2}$ e $\psi \circ \varphi = id_{E_1}$, cioè φ è un isomorfismo. □

Corollario 3.151 (Criterio di esistenza per automorfismi).

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento e consideriamo $x_0 \in X$, $F = p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$, allora esiste un automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se e solo se $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_2))$ in $\pi_1(X, x_0)$.

Dimostrazione.

È il teorema per $E_1 = E_2$ e $p_1 = p_2$. □

Proposizione 3.152 (Caratterizzazione di rivestimenti isomorfi).

Siano $p_1 : E_1 \rightarrow X$ e $p_2 : E_2 \rightarrow X$ rivestimenti e scegliamo $\tilde{x}_j \in E_j$ con $p_1(\tilde{x}_1) = x_0 = p_2(\tilde{x}_2)$. Allora esiste un isomorfismo $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ se e solo se $p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1))$ e $p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2))$ sono coniugati in $\pi_1(X, x_0)$.

Dimostrazione.

\implies) Supponiamo che φ esista e poniamo $\tilde{x}'_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$. Per il teorema (3.150) si ha

$$p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}'_2)).$$

Per le proprietà dell'azione di monodromia (3.84) si ha che

$$p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}'_2)) = \text{stab}(\tilde{x}'_2) \text{ e } p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2)) = \text{stab}(\tilde{x}_2).$$

La tesi segue ricordando che gli stabilizzatori di un elemento rispetto alla stessa azione sono coniugati²¹.

\impliedby) Se i gruppi sono coniugati allora esiste $[\gamma]$ tale che

$$p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)) = [\gamma]^{-1} p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2)) [\gamma].$$

Sia $\tilde{\gamma}$ il sollevamento di γ che parte da \tilde{x}_2 e poniamo $\tilde{x}'_2 = \tilde{\gamma}(1)$. Osserviamo che

$$[\gamma]^{-1} p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2)) [\gamma] = p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}'_2)),$$

quindi per il teorema (3.150), ponendo $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$, si ha che i rivestimenti sono isomorfi tramite una qualche φ . □

3.8.2 Rivestimenti regolari e corrispondenza di Galois

Da questo momento supponiamo sempre che gli spazi siano connessi per archi e localmente connessi per archi.

Studiamo ora in più dettaglio l'azione di $\text{Aut}(p)$ e i quozienti che ne possono derivare.

Proposizione 3.153 (Azione di $\text{Aut}(p)$ è propriamente discontinua).

$\text{Aut}(p)$ agisce in modo propriamente discontinuo su E .

Dimostrazione.

Siano $\tilde{x} \in E$, $x = p(\tilde{x})$ e $U \subseteq X$ un intorno ben rivestito di x . Scriviamo $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$ con $V_{\alpha} \subseteq E$ aperto e $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$ omeomorfismo. Sia V_0 il foglio contenente \tilde{x} .

Per concludere basta mostrare che se $\varphi \in \text{Aut}(p)$ con $\varphi(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset$ allora $\varphi = id_E$. Se $\varphi(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset$ allora esiste $z \in V_0$ tale che $\varphi(z) \in V_0$. Poiché

²¹Fatto di Algebra

$p \circ \varphi = p$, si ha che $p(\varphi(z)) = p(z)$. Dato che $p|_{V_0}$ è iniettiva si deve avere che $\varphi(z) = z$.

Abbiamo dunque mostrato che id_E e φ sono sollevamenti di p con $\varphi(z) = id_E(z)$ e quindi per l'unicità dei sollevamenti (3.75) $\varphi = id_E$. \square

Teorema 3.154 (Per rivestimento da azione propriamente discontinua gli automorfismi sono il gruppo).

Sia G un gruppo che agisce su Y in modo propriamente discontinuo. Se $p : Y \rightarrow Y/G$ è il rivestimento indotto dal quoziente (3.71) si ha che $\text{Aut}(p) = G$ ²².

Dimostrazione.

\supseteq) Per definizione $G \curvearrowright Y$ e se $g \in G$ abbiamo $p \circ g = p$ per definizione di Y/G .
 \subseteq) Siano $\varphi \in \text{Aut}(p)$ e $\tilde{y} \in Y$. Allora $\varphi(\tilde{y})$ appartiene alla stessa fibra di \tilde{y} , quindi per definizione di p e Y/G esiste $g \in G$ tale che $\varphi(\tilde{y}) = g \cdot \tilde{y}$. Segue che $g^{-1} \circ \varphi(\tilde{y}) = \tilde{y}$, cioè $g^{-1} \circ \varphi \in \text{Aut}(p)$ e fissa un punto. Dato che l'azione di $\text{Aut}(p)$ è propriamente discontinua (3.153) si ha che $g^{-1} \circ \varphi = id_Y$, dunque $\varphi = g$ e quindi $\text{Aut}(p) \subseteq G$. \square

Potremmo chiederci se *ogni* rivestimento si può scrivere come quoziente per azione propriamente discontinua di gruppo. Purtroppo non è vero perché una scrittura del genere implicherebbe $\text{Aut}(p) = G$ transitivo sulle fibre (per definizione di quoziente $p(x) = p(y)$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $x = g \cdot y$) ma non tutti i gruppi degli automorfismi sono transitivi sulle fibre.

Definiamo allora la classe dei rivestimenti che hanno quest'ultima proprietà:

Definizione 3.155 (Rivestimento regolare).

Un rivestimento $p : E \rightarrow X$ è **regolare** (o **normale** o **di Galois**) se l'azione di $\text{Aut}(p)$ è transitiva su ogni fibra rispetto a p .

Proposizione 3.156 (I rivestimenti universali sono regolari).

I rivestimenti universali sono regolari.

Dimostrazione.

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento universale. Poiché $\pi_1(E, \tilde{x}) = \{1\}$ si ha che $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \{1\}$ in $\pi_1(X, x_0)$ per ogni $\tilde{x} \in F = p^{-1}(x_0)$. In particolare queste immagini coincidono per ogni coppia di punti in F , dunque per (3.151) si ha che p ammette un automorfismo da \tilde{x}_1 a \tilde{x}_2 per ogni $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$, cioè $\text{Aut}(p)$ è transitivo su F , ovvero p è regolare per definizione. \square

Lemma 3.157.

Siano $p : E \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0, x_1 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$. Allora dato $\tilde{\gamma} \in \Omega(E, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ e posto $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ si ha che

$$\Phi_\gamma : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ [\eta] & \longmapsto & [\tilde{\gamma} * \eta * \gamma] \end{array}$$

è un isomorfismo e induce l'isomorfismo

$$\Phi_\gamma|_{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))} : p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \rightarrow p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1))$$

²²stiamo identificando G con gli omeomorfismi che induce su Y , che possiamo fare perché l'azione è propriamente discontinua, infatti $\ell_g^{-1} \circ \ell_h = id_Y$ se e solo se $g^{-1}h = 1_G$

Dimostrazione.

Definiamo i seguenti isomorfismi (3.38)

$$\Phi_\gamma : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ [\eta] & \longmapsto & [\tilde{\gamma} * \eta * \gamma] \end{array}, \quad \Phi_{\tilde{\gamma}} : \begin{array}{ccc} \pi_1(E, \tilde{x}_0) & \longrightarrow & \pi_1(E, \tilde{x}_1) \\ [\tilde{\eta}] & \longmapsto & [\tilde{\gamma} * \tilde{\eta} * \tilde{\gamma}] \end{array}.$$

Osserviamo che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\Phi_{\tilde{\gamma}}} & \pi_1(E, \tilde{x}_1) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi_\gamma} & \pi_1(X, x_1) \end{array}$$

infatti

$$p_*(\Phi_{\tilde{\gamma}}([\tilde{\eta}])) = [p \circ (\tilde{\gamma} * \tilde{\eta} * \tilde{\gamma})] = [\tilde{\gamma} * p \circ \tilde{\eta} * \gamma] = \Phi_\gamma(p_*([\tilde{\eta}])).$$

In particolare anche il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\Phi_{\tilde{\gamma}}} & \pi_1(E, \tilde{x}_1) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) & \xrightarrow{\Psi} & p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) \end{array} \quad \text{dove } \Psi = \Phi_\gamma|_{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))}.$$

Poiché $\Phi_{\tilde{\gamma}}$ è un isomorfismo e p_* è un isomorfismo con l'immagine (3.80) si ha che $\Phi_\gamma|_{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))}$ è un isomorfismo. \square

Teorema 3.158 (Caratterizzazioni dei rivestimenti regolari).

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento e fissiamo $x_0 \in X$ e $F = p^{-1}(x_0)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $\text{Aut}(p)$ è transitivo su F
2. Esiste $\tilde{x} \in F$ tale che $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$
3. Per ogni $\tilde{x} \in F$, $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$
4. p è regolare.

Dimostrazione.

$3 \iff 1$) $\text{Aut}(p)$ è transitivo su F se e solo se $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ non dipende dalla scelta di $\tilde{x} \in F$, infatti $\text{Aut}(p)$ è transitivo se e solo se esiste un automorfismo che porta un qualsiasi punto della fibra in un dato altro e questo succede se e solo se i $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ coincidono per ogni $\tilde{x} \in F$ (3.151). Per concludere osserviamo che per le proprietà dell'azione di monodromia (3.84)

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \text{stab}(\tilde{x})$$

e due stabilizzatori per una stessa azione sono sempre coniugati, quindi abbiamo mostrato che (1) vale se e solo se per ogni $\tilde{x} \in F$

$$\begin{aligned} \forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0) \quad \text{stab}(\tilde{x}) = [\gamma]^{-1} \text{stab}(\tilde{x}) [\gamma] &\iff \\ \iff p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \text{stab}(\tilde{x}) \triangleleft \pi_1(X, x_0) & \end{aligned}$$

e questa è la condizione (3).

3 \implies 2) Ovvio.

2 \implies 1) Basta ricordare che gli stabilizzatori per una certa azione sono tutti e soli i coniugati di uno stabilizzatore fissato.

4 \implies 1) Regolare significa che $\text{Aut}(p)$ è transitivo su ogni fibra, in particolare lo è per quella di x_0 .

1 \implies 4) Siano $x_0, x_1 \in X$ e fissiamo $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$. Sia $\tilde{\gamma}$ un cammino in E ²³ da \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 e poniamo $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} \in \Omega(X, x_0, x_1)$.

Per il lemma (3.157) il coniugio tramite $[\gamma]$ induce due isomorfismi:

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \quad \text{e} \quad \Phi|_{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))} : p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \rightarrow p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)).$$

Dato che $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ è normale in $\pi_1(X, x_0)$ (abbiamo già mostrato le equivalenze tra (1), (2) e (3)) e poiché gli isomorfismi mantengono la normalità, si ha che $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1))$ è normale in $\pi_1(X, x_1)$, dunque $\text{Aut}(p)$ è transitivo anche su $p^{-1}(x_1)$. La tesi segue ricordando che p è regolare se e solo se $\text{Aut}(p)$ è transitivo su ogni fibra. \square

La caratterizzazione in termini di sottogruppi normali risulterà chiave per trovare la corrispondenza di Galois che cerchiamo. Infatti grazie al prossimo risultato potremo scrivere gli automorfismi di rivestimenti regolari come quoziente del gruppo fondamentale dello spazio base.

Teorema 3.159 ($\text{Aut}(p)$ in termini del gruppo fondamentale).

Sia $p : E \rightarrow X$ un rivestimento e $\tilde{x}_0 \in E$. Allora

$$\text{Aut}(p) \cong N_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))) / p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)),$$

dove $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ e $N_G(H)$ indica il **normalizzatore** di H in G ²⁴.

Dimostrazione.

L'isomorfismo sarà indotto dalla seguente mappa tramite il primo teorema di omomorfismo

$$\alpha : \begin{array}{ccc} N_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))) & \longrightarrow & \text{Aut}(p) \\ [\gamma] & \longmapsto & \varphi_\gamma \end{array}$$

dove φ_γ è l'unico automorfismo tale che $\varphi_\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$ (unico per l'unicità dei sollevamenti (3.75)).

Per semplificare la notazione poniamo $H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$.

α è ben definito) Sia $[\gamma] \in N(H)$ e cerchiamo $\varphi \in \text{Aut}(p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$. Per il teorema sull'isomorfismo di rivestimenti fissato un punto (3.150) basta mostrare che

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot [\gamma])) = H.$$

Calcoliamo $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]))$:

Sia $\tilde{\gamma}$ il sollevamento di γ uscente da \tilde{x}_0 . Per definizione $\tilde{x}_0 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$.

Per il lemma (3.157) si ha che il coniugio per $[\gamma]$ induce un isomorfismo

$$\Psi : H \rightarrow p_*(\pi_1(E, \tilde{\gamma}(1))) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot [\gamma])),$$

²³Stiamo supponendo E connesso per archi in questa sezione.

²⁴Se $H \leq G$ allora $N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$

cioè

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot [\gamma])) = [\gamma]^{-1}H[\gamma].$$

Poiché $[\gamma] \in N(H)$ abbiamo l'uguaglianza cercata.

α è un omomorfismo) Siano $[\gamma_1], [\gamma_2] \in N(H)$. Poniamo $\varphi_j = \alpha([\gamma_j])$ e $\varphi_{12} = \alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) = \alpha([\gamma_1 * \gamma_2])$. Vogliamo verificare che $\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Basta verificare che

$$\widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma_1 * \gamma_2] = \varphi_{12}(\tilde{x}_0) \stackrel{?}{=} \varphi_1(\varphi_2(\tilde{x}_0)) = \varphi_1((\widetilde{\gamma_2})_{\tilde{x}_0}(1)).$$

Per alleggerire la notazione evitiamo di scrivere \tilde{x}_0 al pedice per il resto di questa dimostrazione.

Dato che $p(\varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2) = p \circ \tilde{\gamma}_2 = \gamma_2$ si ha che $\varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2$ è un sollevamento di γ_2 che parte da $\varphi_1(\tilde{\gamma}_2(0)) = \varphi_1(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1(1)$, dunque $\tilde{\gamma}_1 * \varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2$ è un sollevamento di $\gamma_1 * \gamma_2$ che parte da \tilde{x}_0 . Per l'unicità dei sollevamenti (3.75) si ha che

$$\tilde{\gamma}_1 * (\varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2) = \widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}.$$

In particolare

$$\widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}(1) = \tilde{\gamma}_1 * \varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2(1) = \varphi_1(\tilde{\gamma}_2(1))$$

come voluto.

α è surgettivo) Sia $\varphi \in \text{Aut}(p)$ e siano $\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}_0)$, $\tilde{\gamma} \in \Omega(E, \tilde{x}_0, \tilde{x})$ e $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Per definizione $\tilde{x} = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$. Affermiamo che $[\gamma] \in N(H)$, infatti

$$H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \stackrel{\text{Esiste aut.}}{=} p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \stackrel{(3.157)}{=} [\gamma]^{-1}H[\gamma].$$

Per concludere osserviamo che $[\gamma] \in N(H)$ implica $\varphi = \alpha([\gamma])$, infatti

$$\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma] = \alpha([\gamma])(\tilde{x}_0)$$

e questo basta a identificare univocamente l'automorfismo per l'unicità dei sollevamenti (3.75).

$\ker \alpha = H$) Sia $[\gamma] \in N(H)$ e $\varphi = \alpha([\gamma])$. Si ha che

$$\varphi = id_E \iff \tilde{x}_0 = \varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}(1) \iff [\tilde{\gamma}] \in \pi_1(E, \tilde{x}_0) \iff [\gamma] = p_*([\tilde{\gamma}]) \in H.$$

□

Proposizione 3.160 (Automorfismi di rivestimenti regolari).

Se p è regolare allora $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ con $x_0 = p(\tilde{x}_0)$

Dimostrazione.

Per la caratterizzazione (3.158) si ha che $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ è normale in $\pi_1(X, x_0)$, quindi per il teorema (3.159) abbiamo la tesi. □

Corollario 3.161 (Automorfismi del rivestimento universale sono il gruppo fondamentale).

Se p è un rivestimento universale allora $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Dimostrazione.

Segue immediatamente da (3.160) osservando che, poiché E è semplicemente connesso, vale

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = p_*({1}) = {1}.$$

□

Corollario 3.162 (Corrispondenza di Galois per rivestimenti regolari).

Esiste una corrispondenza biunivoca tra i rivestimenti regolari di X a meno di isomorfismo e sottogruppi normali di $\pi_1(X, x_0)$. Sotto questa corrispondenza il grado del rivestimento corrisponde all'indice del sottogruppo.

Dimostrazione (IDEA).

La corrispondenza associa ad un rivestimento regolare $p : E \rightarrow X$ il sottogruppo $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$, dove $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ qualsiasi.

Dato invece $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$ costruiamo il seguente rivestimento:

Sia $\tilde{p} : E \rightarrow X$ un rivestimento universale di X (3.140). Siano $G = \pi_1(X, x_0)$, $\tilde{X} = E/H$, $p_1 : E \rightarrow \tilde{X}$ e $p_2 : \tilde{X} \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p_1} & \tilde{X} = E/H \\ \tilde{p} \downarrow & \swarrow p_2 & \\ X = E/G & & \end{array}$$

dove $X = E/G$ perché $\text{Aut}(\tilde{p}) \cong G$ (3.161) e poiché \tilde{p} è regolare (3.156) si ha $X \cong E/\text{Aut}(\tilde{p})$.

Chiaramente p_1 è un rivestimento (3.71) quindi anche p_2 è un rivestimento. (versione non dimostrata di (3.141))

Per concludere basta verificare che l'azione di G/H su E/H è propriamente discontinua da cui discenderà che p_2 è un rivestimento regolare (quello che cerchiamo).

Mostriamo che $H = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$:

Per le proprietà dell'azione di monodromia (3.84)

$$p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \text{stab}(\tilde{x}_0),$$

il quale è un coniugato di H . Dato che H è normale, $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$ come voluto. □

3.8.3 Applicazioni della teoria dei rivestimenti

Teorema 3.163 (Borsuk-Ulam).

Non esistono funzioni $f : S^2 \rightarrow S^1$ continue tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $z \in S^2$.

Dimostrazione.

Per assurdo sia f una tale funzione. Poiché S^2 è semplicemente connesso, f si solleva a $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f = \pi \circ \tilde{f}$, dove $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ è il rivestimento universale, infatti

$$f_*(\pi_1(S^2)) = f_*({1}) = {1} \subseteq \pi_*(\pi_1(\mathbb{R}))$$

e ho il sollevamento per (3.88).

Sia $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)$. Chiaramente g è continua e per ogni $x \in S^2$ si ha $g(-x) = \tilde{f}(-x) - \tilde{f}(x) = -g(x)$. Poiché S^2 è connesso, $g(S^2)$ è connesso in \mathbb{R} , cioè è un intervallo (2.193). Osserviamo che per ogni $g(x) \in g(S^2)$ si ha che $g(-x) = -g(x) \in g(S^2)$, dunque $g(S^2)$ è un intervallo simmetrico rispetto a 0 non vuoto. In particolare $0 \in g(S^2)$, cioè esiste $x_0 \in S^2$ tale che $g(x_0) = 0$.

Si ha dunque che $\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(-x_0)$, quindi proiettando $f(x_0) = f(-x_0)$, ma questo è assurdo perché $f(x_0) = -f(-x_0)$. \square

Teorema 3.164.

Non esistono funzioni $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue e iniettive.

Dimostrazione.

Per assurdo sia $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ iniettiva. Definiamo $g : S^2 \rightarrow S^1$ data da

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

che è ben definita perché f è iniettiva e quindi $f(x) \neq f(-x)$. Allora g è continua e $g(-x) = -g(x)$, che è assurdo per Borsuk-Ulam (3.163). \square

Capitolo 4

Funzioni Olomorfe

4.1 Richiami di calcolo in più variabili

Definizione 4.1 (Differenziabilità e differenziale).

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione. f è **differenziabile** in $x_0 \in U$ se esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + L(v) + o(|v|).$$

In tal caso L è unica e si dice **differenziale** di f in x_0 e si denota $df_{x_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.¹

Osservazione 4.2.

Se f è \mathbb{R} -lineare allora coincide con il proprio differenziale.

Dimostrazione.

Caso particolare della definizione di differenziale. □

Osservazione 4.3.

Il differenziale di una composizione è la composizione dei differenziali.

Dimostrazione.

Segue dalle seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + v)) &= g(f(x_0) + df_{x_0}(v) + o(|v|)) = \\ &= g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}(df_{x_0}(v) + o(|v|)) + o(df_{x_0}(v) + o(|v|)) = \\ &= g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}(df_{x_0}(v)) + dg_{f(x_0)}(o(|v|)) + o(|v|) = \\ &= g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}(df_{x_0}(v)) + o(|v|). \end{aligned}$$

□

Definizione 4.4 (Derivate parziali).

Se $\{e_i\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^m allora definiamo la i -esima derivata parziale di f come

$$df_{x_0}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

¹La notazione usata nel corso di analisi 2 è $\mathcal{D}f(x_0)$ al posto di df_{x_0} .

Per il resto del capitolo identifichiamo \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} tramite l'isomorfismo $(x, y) \leftrightarrow x + iy$.

Osservazione 4.5.

\mathbb{C} è sia un \mathbb{C} -spazio vettoriale (di dimensione 1 con base $\{1\}$) che un \mathbb{R} -spazio vettoriale (di dimensione 2 con base $\{1, i\}$).

Definizione 4.6 (Coniugio).

La seguente mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + iy & \longmapsto & x - iy \end{array}$$

è detta **coniugio**. Se $x \in \mathbb{C}$ spesso indichiamo la sua immagine tramite la mappa di coniugio con \bar{z} e chiamiamo questo il **coniugato (complesso)** di z .

Osservazione 4.7.

Il coniugio è \mathbb{R} -lineare ma non \mathbb{C} -lineare ($-i = \bar{i} \neq i\bar{1} = i$).

Proposizione 4.8 (Il differenziale è \mathbb{C} -lineare).

Il differenziale è \mathbb{C} -lineare, cioè

$$d((a + bi)f)_P = (a + bi)df_P.$$

Dimostrazione.

Per alleggerire la notazione omettiamo i pedici P e identifichiamo liberamente \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 :

$$d((a + bi)f) = d(af + ibf) = adf + bd(if).$$

Per concludere basta mostrare che $d(if) = idf$. Se $f(z) = g(z) + ih(z)$ allora

$$d(if) = d(-h + ig) = \mathcal{D} \begin{pmatrix} -h \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{D}h \\ \mathcal{D}g \end{pmatrix} = i(\mathcal{D}g + i\mathcal{D}h) = idf.$$

□

Proposizione 4.9 (Proprietà del differenziale).

Siano $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$ con $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto mappe differenziabili in P , allora

1. $(d\bar{f}_1)_P = (\overline{df_1})_P$
2. $d(f_1 f_2)_P = (df_1)_P f_2(P) + f_1(P)(df_2)_P$
3. Se $f_1(P) \neq 0$ allora $\frac{1}{f_1}$ è definita in un intorno di P e

$$d\left(\frac{1}{f_1}\right)_P = -\frac{(df_1)_P}{f_1(P)^2}.$$

Dimostrazione.

Per alleggerire la notazione omettiamo le valutazioni in P e i pedici quando non si presenta ambiguità.

1) Sia φ la mappa di coniugio. Poiché φ è \mathbb{R} -lineare si ha che $d\varphi = \varphi$ in ogni punto. Per concludere osserviamo che

$$d(\varphi \circ f) = d\varphi \circ df = \varphi \circ df.$$

2) Siano $f_1 = g_1 + ih_1$ e $f_2 = g_2 + ih_2$, allora

$$f_1 f_2 = g_1 g_2 - h_1 h_2 + i(g_1 h_2 + g_2 h_1).$$

La tesi segue dal seguente calcolo:

$$\begin{aligned} d(f_1 f_2) &= d(g_1 g_2 - h_1 h_2) + id(g_1 h_2 + g_2 h_1) = \\ &= g_1 dg_2 + g_2 dg_1 - h_1 dh_2 - h_2 dh_1 + i(g_1 dh_2 + h_2 dg_1 + g_2 dh_1 + h_1 dg_2) = \\ &= g_1 dg_2 - h_1 dh_2 + i(g_1 dh_2 + h_1 dg_2) + g_2 dg_1 - h_2 dh_1 + i(h_2 dg_1 + g_2 dh_1) = \\ &= (g_1 + ih_1)(dg_2 + idh_2) + (g_2 + ih_2)(dg_1 + idh_1) = \\ &= f_1 df_2 + f_2 df_1. \end{aligned}$$

3) La tesi segue dal seguente calcolo

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{f}\right) &= d\left(\frac{1}{g+ih}\right) = d\left(\frac{g-ih}{g^2+h^2}\right) = d\left(\frac{g}{g^2+h^2}\right) - id\left(\frac{h}{g^2+h^2}\right) = \\ &= \frac{g^2 dg + h^2 dg - 2g^2 dg - 2ghdh}{(g^2+h^2)^2} - i \frac{g^2 dh + h^2 dh - 2ghdg - 2h^2 dh}{(g^2+h^2)^2} = \\ &= \frac{-g^2 dg + h^2 dg + 2ighdg - ig^2 dh + ih^2 dh - 2ghdh}{(g+ih)^2(g-ih)^2} = \\ &= -\frac{(dg+idh)(g^2-h^2-2igh)}{(g+ih)^2(g^2-h^2-2igh)} = \\ &= -\frac{df}{f^2}. \end{aligned}$$

□

Notazione 4.10.

Per semplicità notazionale a volte scriveremo z al posto di $id_{\mathbb{C}}$, \bar{z} al posto della mappa coniugio, x per $a+bi \mapsto a = \Re(a+bi)$ e y per $a+bi \mapsto b = \Im(a+bi)$. Cercherò di rendere la notazione meno ambigua possibile quando possibile.

Osservazione 4.11.

$z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ come funzioni. Osserviamo inoltre che

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy$$

per linearità. Nonostante $z = dz$ e $\bar{z} = d\bar{z}$ manterremo le d quando questo renderà più chiari i ragionamenti (vale a dire nel contesto delle 1-forme).

Osserviamo che con queste notazioni $dx = x$ e $dy = y$.

Osservazione 4.12.

Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è differenziabile in $P \in U$ si ha che

$$df_P = \frac{\partial f}{\partial x}(P)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P)dy.$$

Dimostrazione.

Segue dal seguente calcolo:

$$\begin{aligned} df_P(a+bi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(a+bi) \\ y(a+bi) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(P)x(a+bi) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)y(a+bi) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P)dy \right) (a+bi), \end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza segue ricordando la definizione di df_P in termini del gradiente di f . \square

Osservazione 4.13.

Dato che $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$ si ha che

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}.$$

Da questo segue che

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dz + d\bar{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dz - d\bar{z}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}. \end{aligned}$$

Motivati dall'espressione sopra per df diamo le seguenti definizioni:

Notazione 4.14.

Poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

da cui

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Osservazione 4.15.

Si ha che $\frac{\partial f}{\partial z} dz$ è \mathbb{C} -lineare e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ è \mathbb{C} -antilineare.

Dimostrazione.

dz è \mathbb{C} -lineare, quindi anche una costante per dz lo è. Similmente per $d\bar{z}$ e \mathbb{C} -antilinearità. \square

Abbiamo dunque decomposto f in una componente \mathbb{C} -lineare e una componente \mathbb{C} -antilineare. La decomposizione in realtà è unica perché

Proposizione 4.16 (Le \mathbb{R} lineari sono la somma diretta delle \mathbb{C} lineari e \mathbb{C} antilineari).

$$\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{R}\text{-lin.}\} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{C}\text{-lin.}\} \oplus \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{C}\text{-antilin.}\}$$

Dimostrazione.

⊃) Le funzioni \mathbb{C} -lineari e \mathbb{C} -antilineari sono entrambe \mathbb{R} -lineari.

⊆) Se f è \mathbb{R} -lineare allora $f = df$ e abbiamo la decomposizione esibita.

Somma diretta) Se f è sia \mathbb{C} -lineare che \mathbb{C} -antilineare allora

$$-if(z) = \bar{i}f(z) \stackrel{\text{antilin.}}{=} f(iz) \stackrel{\text{lin.}}{=} if(z),$$

dunque $2if(z) = 0$, da cui $f(z) = 0$. □

4.2 Funzioni olomorfe

Definizione 4.17 (Funzione olomorfa).

Siano $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, $z_0 \in U$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. La funzione f si dice **olomorfa** (o **derivabile in senso complesso**) in z_0 se il seguente limite esiste

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}.$$

f è **olomorfa** se lo è in z_0 per ogni $z_0 \in U$.

Poniamo

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa}\}$$

Osserviamo che essere olomorfa ed essere differenziabile hanno definizioni formalmente molto simili, ma sono proprietà diverse come mostra la seguente proposizione. La differenza sostanziale sta nel fatto che $z - z_0$ nella definizione è un numero complesso, non una distanza. Più esplicitamente, la differenziabilità richiede solo l'esistenza di

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|},$$

che è una condizione più debole.

Lemma 4.18.

Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $z_0 \in U$ e $f'(z_0)$ denota il limite della definizione di olomorfa allora

$$df_{z_0}(w) = f'(z_0)w.$$

Dimostrazione.

Segue dalla seguente catena di equivalenze

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= f'(z_0) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{|h|} &= \frac{1}{h} \cdot 0 = 0 \\ f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0) &= o(|h|) \\ f(z_0 + h) &= f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|) \\ f'(z_0)h &= df_{z_0}(h). \end{aligned}$$

□

Proposizione 4.19 (Caratterizzazioni delle funzioni olomorfe).

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ con U aperto e $z_0 \in U$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è olomorfa in z_0
2. f è differenziabile in z_0 e df_{z_0} è \mathbb{C} -lineare
3. f è differenziabile in z_0 e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$
4. f è differenziabile e valgono le **equazioni di Cauchy-Riemann**, cioè

$$\frac{\partial \Re(f)}{\partial x} = \frac{\partial \Im(f)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Re(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \Im(f)}{\partial x}.$$

5. $df_{z_0}(w) = f'(z_0)w$.

Dimostrazione.

1 \implies 2) Per il lemma $df_{z_0}(w) = f'(z_0)w$ e la moltiplicazione per uno scalare è una mappa \mathbb{C} -lineare.

2 \iff 3) Segue dal fatto che

$$df_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)d\bar{z}$$

e dalla decomposizione delle \mathbb{R} -lineari in somma diretta (4.16).

3 \iff 4) Se $a = \Re(f)$ e $b = \Im(f)$ allora $f = a + ib$. La tesi segue dalla seguente catena di equivalenze

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \frac{\partial a + ib}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a + ib}{\partial x} + i \frac{\partial a + ib}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x} + i \frac{\partial b}{\partial x} + i \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y}. \end{aligned}$$

2 \implies 1) Poiché df_{z_0} è \mathbb{C} -lineare si ha che esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + o(|h|)$, dunque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lambda \in \mathbb{C},$$

cioè f è olomorfa in z_0 . □

Teorema 4.20 (Proprietà aritmetiche delle olomorfe).

Siano $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe. Allora

1. se $U = V$ allora $f + g : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa
2. se $U = V$ allora $fg : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e

$$(fg)' = f'g + fg'$$

3. se $f(U) \subseteq V$ allora $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

4. se $f'(z_0) \neq 0$ e $f \in C^1$ allora esistono un intorno W di $f(z_0)$ in \mathbb{C} e un intorno Z di z_0 in U tali che $f(Z) = W$, $f|_Z \rightarrow W$ è bigettiva e $(f|_Z)^{-1} : W \rightarrow Z$ è olomorfa con

$$((f|_Z)^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Dimostrazione.

1) Osserviamo che

$$\begin{aligned} (f + g)(z) &= f(z_0) + g(z_0) + df_{z_0}(z - z_0) + dg_{z_0}(z - z_0) + o(|z - z_0|) = \\ &= (f + g)(z_0) + (df_{z_0} + dg_{z_0})(z - z_0) + o(|z - z_0|), \end{aligned}$$

dove $(df_{z_0} + dg_{z_0})$ è \mathbb{C} -lineare perché somma di \mathbb{C} -lineari. Dall'espressione raggiunta è chiaro che $d(f + g)_{z_0} = df_{z_0} + dg_{z_0}$ e quindi $f + g$ è olomorfa perché ha differenziale \mathbb{C} -lineare (4.19).

2) Osserviamo che

$$\begin{aligned} (fg)(z_0 + z) &= (f(z_0) + df_{z_0}(z) + o(|z|))(g(z_0) + dg_{z_0}(z) + o(|z|)) = \\ &= (fg)(z_0) + g(z_0)df_{z_0}(z) + f(z_0)dg_{z_0}(z) + o(|z|), \end{aligned}$$

da cui

$$d(fg)_{z_0}(z) = g(z_0)df_{z_0}(z) + f(z_0)dg_{z_0}(z) = (g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0))z,$$

che è la tesi ricordando le caratterizzazioni delle funzioni olomorfe (4.19).

3) Ricordiamo che

$$d(g \circ f)_{z_0} = dg_{f(z_0)} \circ df_{z_0},$$

da cui, ricordando che $df_{z_0}(w) = f'(z_0)w$ (4.19) si ha che

$$d(g \circ f)_{z_0}(w) = g'(f(z_0))f'(z_0)w,$$

o equivalentemente $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

4) Passiamo con l'isomorfismo canonico da \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 :

$$df_{z_0} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

dove $a + ib = f'(z_0)$. Osserviamo che $\det(df_{z_0}) = a^2 + b^2 = |f'(z_0)|^2 = 0$ se e solo se $f'(z_0) = 0$.

Poiché supponiamo che $f'(z_0) \neq 0$ possiamo applicare il *teorema di invertibilità locale*², cioè esistono W, Z intorni di $f(z_0)$ e z_0 rispettivamente tali che

$$f|_Z : Z \rightarrow W$$

²È la nostra tesi ma con C^1 al posto di olomorfe. Vedi analisi 2 per dettagli.

è invertibile con inversa differenziabile e $d((f|_Z)^{-1})_{f(z_0)} = (df_{z_0})^{-1}$.

Se $f'(z_0) \neq 0$ allora la moltiplicazione per $(f'(z_0))^{-1}$ è ben definita ed è la funzione inversa di df_{z_0} , in particolare è \mathbb{C} -lineare (4.19).

Poiché $f'(z_0) \neq 0$, poiché f è C^1 (cioè f' è continua) possiamo supporre che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in Z$ a meno di restringerlo, quindi applicando quanto detto a tutti i punti di Z abbiamo mostrato che $(f|_Z)^{-1}$ è olomorfa. \square

Proposizione 4.21 (Inversa moltiplicativa di olomorfa è olomorfa).

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in z_0 e $f(z_0) \neq 0$ allora $1/f$ è olomorfa in z_0 e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

Dimostrazione.

Osserviamo che se $1/f$ è olomorfa in z_0 allora, poiché $1 = f(z_0)/f(z_0)$, invocando il secondo punto del teorema precedente (4.20) segue immediatamente che il valore di $(1/f)'(z_0)$ è quello specificato nel testo.

Sappiamo dai corsi di analisi che $1/f$ è di classe C^1 . Per (4.19) basta verificare le equazioni di Cauchy-Riemann. Scriviamo $f(z) = a(z) + ib(z)$ tramite l'usuale isomorfismo tra \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 e notiamo che, poiché f è olomorfa, $a_x = b_y$ e $a_y = -b_x$. Segue che

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{a(z)}{a^2(z) + b^2(z)} + i \frac{-b(z)}{a^2(z) + b^2(z)}.$$

Concludiamo verificando le due equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) &= \frac{a_x(a^2 + b^2) - 2a(aa_x + bb_x)}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{b_y(a^2 + b^2) - 2a(ab_y - ba_y)}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{b_y(-a^2 + b^2) + 2aba_y}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{-b_y(a^2 + b^2) + 2aba_y + 2b^2b_y}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{-b_y(a^2 + b^2) + 2b(aa_y + bb_y)}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) &= \frac{a_y(a^2 + b^2) - 2a(aa_y + bb_y)}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{-b_x(a^2 + b^2) - 2a(-ab_x + ba_x)}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{b_x(a^2 - b^2) - 2aba_x}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{b_x(a^2 + b^2) - 2aba_x - 2b^2b_x}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{b_x(a^2 + b^2) - 2b(aa_x + bb_x)}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

\square

4.3 Analitiche

Studiamo una classe di funzioni apparentemente più piccola delle funzioni olomorfe. Mostriamo successivamente che le funzioni analitiche da $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto a

\mathbb{C} sono esattamente le funzioni olomorfe. Per il momento limitiamoci a studiarle in quanto tali.

4.3.1 Serie di potenze

Definizione 4.22 (Serie di potenze).

Una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è detta **serie di potenze di centro** z_0 .

Osservazione 4.23.

Una serie di potenze ammette un **raggio di convergenza**, cioè esiste $R > 0$ tale che la serie converge assolutamente in $B_R(z_0)$ e diverge in $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)}$.

Definizione 4.24 (Funzione analitica).

Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è **analitica** se per ogni $z_0 \in U$ esiste $R > 0$ tale che f sia esprimibile come serie di potenze centrata in z_0 per ogni $z \in B_R(z_0)$.

Proposizione 4.25 (Le analitiche sono continue).

Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analitica è continua.

Dimostrazione (Aggiunta per completezza).

Mostriamo che f è continua in ogni punto $z_0 \in U$. Per un opportuno intorno di z_0 sappiamo che f si scrive come serie di potenze centrata in z_0 , sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tale serie. Se R è il raggio di convergenza della serie si ha che in $B(z_0, R)$ la serie è assolutamente convergente, dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Verifichiamo che esiste $\delta > 0$ tale che $|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ per ogni $z \in B(z_0, R)$:

Per continuità di $\sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n$ esiste δ tale che

$$|z - z_0| < \delta \implies \left| \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n - f(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

quindi se $|z - z_0| < \delta$ allora

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \left| \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n - f(z_0) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

come voluto. □

Teorema 4.26 (Serie di potenze sono analitiche).

Supponiamo che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

per ogni $z \in B_R(z_0)$ con $R > 0$. Allora f è analitica su $B_R(z_0)$.

Dimostrazione.

Vogliamo mostrare che per ogni $\tilde{z} \in B_R(z_0)$ esiste $R' > 0$ tale che $B_{R'}(\tilde{z}) \subseteq B_R(z_0)$ e f sia esprimibile come serie di potenze centrata in \tilde{z} . Scegliamo $R' = R - |\tilde{z}|$ e sia $z \in B_{R'}(\tilde{z})$. Allora $z = \tilde{z} + w$ con $|w| < R'$. Per costruzione $|\tilde{z}| + |w| < R$, dunque $\sum a_n(|\tilde{z}| + |w|)^n$ converge assolutamente. Dunque

$$\sum a_n(|\tilde{z}| + |w|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |\tilde{z}|^{n-i} |w|^i$$

converge assolutamente. Possiamo dunque riordinare i termini senza cambiare il limite. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(\tilde{z} + w)^n}_{=z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} w^i \tilde{z}^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} w^i \tilde{z}^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{n}{i} \tilde{z}^{n-i} w^i}_{\doteq b_i} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z - \tilde{z})^i, \end{aligned}$$

dove b_i è ben definito se la serie che lo definisce converge. b_i è sempre ben definito perché $|\tilde{z} - z_0| < R$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R}$ e $\binom{n}{i} \leq \frac{n^i}{i!}$, dunque

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| \binom{n}{i}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \limsup_n \frac{\sqrt[n]{n^i}}{\sqrt[n]{i!}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R}.$$

□

Osservazione 4.27.

Il teorema potrebbe sembrare banale ma ricordiamo che analitica significa che la funzione si esprime come serie di potenze centrata in un *qualsiasi* punto del dominio. La scrittura con centro in z_0 non è sufficiente.

Teorema 4.28 (Serie derivata).

Se $f = \sum a_n(z - z_0)^n$ su $B_R(z_0)$ allora f è olomorfa su $B_R(z_0)$ e

$$f'(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}}_{\text{serie derivata}} \quad \text{per ogni } z \in B_R(z_0)$$

Dimostrazione.

Supponiamo $z_0 = 0$. Basta mostrare che per ogni $\tilde{z} \in B_R(0)$ si ha $f'(\tilde{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \tilde{z}^{n-1}$.

Caso $\tilde{z} = 0$ Vogliamo mostrare che $f'(0) = a_1$:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$$

e questa è una serie di potenze con raggio di convergenza uguale a quello della serie originale. Dato che le serie di potenze sono continue nel loro disco di convergenza il limite del rapporto incrementale per $z \rightarrow 0$ è equivalente a valutare in $z = 0$ e abbiamo la tesi.

Caso generico) Sia $\tilde{z} \in B_R(0)$. Dato che le serie di potenze sono analitiche (4.26) si ha che $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(z - \tilde{z})^i$ in un intorno di \tilde{z} . Per il caso precedente f è olomorfa in \tilde{z} con $f'(\tilde{z}) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \tilde{z}^{n-1}$. \square

Corollario 4.29.

Una funzione analitica complessa è C^∞ in senso complesso.

Corollario 4.30 (Serie di Taylor).

Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ in un intorno di z_0 allora

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n,$$

in particolare l'espressione di f come serie di potenze è unica:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Osservazione 4.31 (Composizione di analitiche è analitica).

Siano $f : U \rightarrow V$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ analitiche, allora $g \circ f$ è analitica.

Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).

Mostriamo che $g \circ f$ si scrive come serie di potenze in un intorno di $z_0 \in U$. In un opportuno intorno di z_0 sappiamo che f si scrive come serie di potenze (sia R il raggio di convergenza) e in un opportuno intorno di $f(z_0)$ sappiamo che g si scrive come serie di potenze (con raggio di convergenza S). Senza perdita di generalità supponiamo che R sia tale che $f(B_R(z_0)) \subseteq B_S(f(z_0))$, che possiamo fare per continuità di f .

Si ha dunque che se $f(z) = \sum a_i(z - z_0)^i$ e $g(w) = \sum b_i(w - f(z_0))^i$ allora in $B_R(z_0)$ si ha che

$$g \circ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right)^n.$$

La tesi segue se mostriamo la convergenza assoluta della serie sopra:

poiché f è assolutamente convergente su $B_R(z_0)$, se consideriamo $0 < r < R$ si ha che f è assolutamente convergente anche sul bordo, cioè

$$rM \doteq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \in \mathbb{R}.$$

Sia $r' = \min\{S/M, r\}$, in modo tale che se $z \in B_{r'}(z_0)$ allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k \leq |z - z_0| \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1}| |z - z_0|^k \leq r' M \leq S.$$

Da questo segue che se $z \in B_r(z_0)$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r'^k \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| S^n \in \mathbb{R}$$

dove l'ultimo passo è l'assoluta convergenza di g in $B_S(f(z_0))$ (per evitare questioni di bordo basta considerare S leggermente più piccolo del vero raggio di convergenza). \square

4.3.2 Ordine di annullamento

Studiamo come si comportano gli zeri delle funzioni analitiche. Questo si rivelerà molto utile nel dare principi di rigidità per le olomorfe.

Definizione 4.32 (Ordine di annullamento).

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. L'**ordine di annullamento** (o **di svanimento** o **di zero**) di f in z_0 è dato da

$$\begin{cases} \min \{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\} & \text{se } \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f^{(n)}(z_0) \neq 0 \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osservazione 4.33.

f ha ordine di annullamento 0 se $f(z_0) \neq 0$ e ha ordine ≥ 1 se $f(z_0) = 0$.

Lemma 4.34 (Caratterizzazione dell'ordine di annullamento).

Sia f analitica (e quindi olomorfa per (4.29)). Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1. z_0 ha ordine di annullamento n_0 per f
2. $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$ in un intorno di z_0 con $g(z_0) \neq 0$ e g analitica.

Dimostrazione.

1 \implies 2) Ricordiamo che per definizione di funzione analitica esiste $R > 0$ tale che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ per ogni $z \in B(z_0, R)$ e $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ per (4.30). Per ipotesi dunque $a_n = 0$ per ogni $n < n_0$ e $a_{n_0} \neq 0$. Si ha allora che

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+n_0} (z - z_0)^n.$$

La serie del secondo membro ha lo stesso raggio di convergenza della serie originale³, dunque definisce una $g : B(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ analitica $g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$.

2 \implies 1) Sia $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$ e g analitica. Per definizione di analitica $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ con $b_0 \neq 0$ in un intorno di z_0 , dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n+n_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dove poniamo

$$a_n = \begin{cases} 0 & n < n_0 \\ b_{n-n_0} & n \geq n_0 \end{cases}.$$

Si ha per (4.30) che

$$f^{(n)}(z_0) = n! \cdot a_n,$$

dunque $f^{(n)}(z_0) = 0$ per $n < n_0$ e non è nullo se $n = n_0$, ovvero n_0 è l'ordine di annullamento di f in z_0 . \square

³i raggi sono definiti da limiti di successioni che coincidono definitivamente

Osservazione 4.35.

Se f è analitica, z_0 ha ordine di annullamento ∞ per f se e solo se $f = 0$ in un intorno di z_0 .

Dimostrazione.

Scelgo l'intorno dove f si scrive come serie di potenze centrata in z_0 e so che ogni coefficiente è nullo per la scrittura come serie di Taylor (4.30). \square

Lemma 4.36.

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analitica e sia $Z = \{z_0 \in U \mid f(z_0) = 0\}$. Sia $z_0 \in Z$. Si ha che z_0 è un punto isolato di Z o $z_0 \in \text{int}(Z)$.

Dimostrazione.

Sia n_0 l'ordine di annullamento di z_0 in f .

$n_0 = \infty$) Dato che f è analitica, per un opportuno intorno di z_0 possiamo scrivere f come serie i cui coefficienti sono multipli di $f^{(i)}(z_0)$. Per ipotesi tutti questi sono nulli dunque $z_0 \in \text{int}(Z)$ perché abbiamo trovato un suo intorno dove f si annulla.

$n_0 \in \mathbb{N}$) Si ha che in un opportuno intorno V di z_0

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z),$$

dove $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica e $g(z_0) \neq 0$. Dato che funzioni analitiche sono continue (4.25) si ha che, a meno di restringere V , possiamo supporre $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in V$, ma allora

$$\forall z \in V \setminus \{z_0\} \quad f(z) = \underbrace{(z - z_0)^{n_0}}_{\neq 0} \underbrace{g(z)}_{\neq 0} \neq 0.$$

\square

Teorema 4.37 (Zeri di analitica sono isolati o coprono la comp. connessa).

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analitica con U connesso. Supponiamo che $Z = f^{-1}(0) \subseteq U$ abbia un punto di accumulazione in U . Allora $f = 0$ come funzione su U .

Dimostrazione.

Poiché \tilde{z} è di accumulazione si ha che esiste una successione $\{z_n\} \subseteq U$ tale che $z_n \rightarrow \tilde{z} \in U$, $z_n \neq \tilde{z}$ e $f(z_n) = 0$ per ogni n . Per continuità di f (4.25) si ha che

$$f(\tilde{z}) = f(\lim z_n) = \lim f(z_n) = \lim 0 = 0,$$

perciò $Z = f^{-1}(0) \supseteq \{z_n\} \cup \{\tilde{z}\}$. Per costruzione \tilde{z} non è uno zero isolato, quindi per il lemma (4.36) abbiamo $\tilde{z} \in \text{int}(Z) \neq \emptyset$.

Poiché U è connesso, basta mostrare che $\text{int}(Z)$ è sia aperto che chiuso.

Aperto) Definizione di parte interna.

Chiuso) Se per assurdo $w \in \overline{\text{int}(Z)} \setminus \text{int}(Z)$ allora esisterebbe una successione $w_n \in \text{int}(Z)$ con $w_n \rightarrow w$ e $w_n \neq w$ ($w \notin \text{int}(Z)$). Allora avremmo $f(w) = 0$ per continuità, in particolare w è uno zero non isolato. Per il lemma (4.36) avremmo $w \in \text{int}(Z)$, contraddicendo le ipotesi \neq . \square

Possiamo riformulare questo risultato nel potente

Corollario 4.38 (Principio di identità per analitiche).

Se U è connesso e $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sono analitiche e $W \subseteq U$ contiene un punto non isolato allora $f = g$ su U se e solo se $f = g$ su W .

Dimostrazione.

Corollario sopra per $f - g$. □

4.4 Esponenziale e logaritmo complessi

4.4.1 Esponenziale complesso

Definizione 4.39 (Esponenziale complesso).

Definiamo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Osservazione 4.40.

L'esponenziale ha raggio di convergenza infinito. In particolare è sempre assolutamente convergente.

Dimostrazione.

I coefficienti sono $\frac{1}{n!}$ e osserviamo che

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

□

Proposizione 4.41 (Proprietà dell'esponenziale complesso).

Valgono i seguenti fatti

1. $e^{z+w} = e^z e^w$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}$. In particolare $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ quindi $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ è ben definita.

2. Se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ allora

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

3. $|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = 1$, in particolare

$$|e^{x+iy}| = |e^x| = e^{\Re(z)}.$$

4. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ è surgettiva

5. Essendo analitica, \exp è olomorfa ed evidentemente $\exp'(z) = \exp(z)$.

6. $e^z = e^w$ se e solo se $z - w = 2k\pi i$

Dimostrazione.

1) Segue dal seguente conto (useremo spesso la convergenza assoluta per riordinare i termini):

$$\begin{aligned}
 e^z e^w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \frac{z^n w^m}{n! m!} = \\
 &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \frac{(n+m)! (z^n w^m)}{n! m! (n+m)!} \stackrel{N=n+m}{=} \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n! (N-n)!} \frac{z^n w^{N-n}}{N!} = \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} z^n w^{N-n} = \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (z+w)^N = \\
 &= e^{z+w}.
 \end{aligned}$$

2) L'unica cosa non ovvia è

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Segue dal seguente calcolo

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} i = \\
 &= \cos y + i \sin y.
 \end{aligned}$$

4) Se $a + ib \in \mathbb{C}^\times$ allora $a + bi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Poniamo $z = \log \rho + i\theta$ e osserviamo che

$$e^z = e^{\log \rho} (\cos \theta + i \sin \theta) = a + bi.$$

5) \exp è definita come serie di potenze, quindi è analitica (4.26) e quindi è olomorfa (4.29). Osserviamo inoltre che

$$n \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!},$$

quindi la serie derivata coincide con l'originale.

6) $e^w = e^z$ se e solo se $e^w (e^{z-w} - 1) = 0$, cioè, poiché $\text{Imm exp} = \mathbb{C}^\times$, $e^{z-w} = 1$. Questo vale se e solo se $\Re(z-w) = 0$ per avere il modulo giusto e $\Im(z-w) = k2\pi$. Troviamo dunque la condizione $z-w = 2k\pi i$. \square

4.4.2 Logaritmo complesso

Sappiamo che $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ è surgettiva. Questa mappa non è iniettiva, dunque non ha senso cercare una inversa globale, ma possiamo provare perlomeno a cercare $L : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\exp L = \text{id}_{\mathbb{C}^\times}$.

Insiemeisticamente una tale mappa esiste⁴, ma vorremmo cercarla continua. Purtroppo mostreremo che una tale funzione non esiste.

⁴(Curiosità) è una formulazione equivalente dell'assioma della scelta

Proposizione 4.42 (L'esponenziale complesso è un rivestimento).

La mappa $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ è un rivestimento.

Dimostrazione.

Osserviamo che \mathbb{C}^\times è connesso, basta quindi mostrare l'esistenza degli intorni ben rivestiti.

Identifichiamo \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 e \mathbb{C}^\times con $\mathbb{R}^+ \times S^1 \cong \mathbb{R} \times S^1$ (coordinate polari). Tramite queste identificazioni l'esponenziale diventa

$$(x, y) \mapsto (e^x, (\cos y, \sin y)).$$

Questa mappa è la mappa prodotto (h, p) , dove

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}, \quad p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ y & \longmapsto & (\cos y, \sin y) \end{array}.$$

Questa mappa è il prodotto di un omeomorfismo e il rivestimento universale di S^1 . Dato $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times S^1$ costruiamo un intorno ben rivestito. Siano U_a un intorno di a in \mathbb{R}^+ e U_b un intorno ben rivestito di b in S^1 per il rivestimento p . Mostriamo che $U_a \times U_b$ è ben rivestito per l'esponenziale:

Poiché h è un omeomorfismo, $h^{-1}(U_a) = W_a$ è un aperto. Poiché U_b è ben rivestito, $p^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} W_{b,i}$ con $W_{b,i}$ aperti disgiunti. Da questo segue che i $W_a \times W_{b,i}$ sono aperti disgiunti. Osserviamo dunque che

$$(h, p)^{-1}(U_a \times U_b) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} W_a \times W_{b,i}.$$

Per concludere osserviamo che, poiché $h|_{W_a}$ e $p|_{W_{b,i}}$ sono omeomorfismi, si ha che $(h, p)|_{W_a \times W_{b,i}}$ è un omeomorfismo, che termina la dimostrazione. \square

Corollario 4.43.

Non esiste $L : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ continua tale che $e^{L(z)} = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}^\times$.

Dimostrazione.

Se L esistesse potrei costruire il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ L \nearrow & & \searrow \exp \\ \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{id} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

per cui, scelti i punti base $L(1) \in \mathbb{C}$ e $1 \in \mathbb{C}^\times$, potremmo costruire il seguente diagramma commutativo di gruppi fondamentali

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(\mathbb{C}, L(1)) & \\ L_* \nearrow & & \searrow \exp_* \\ \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) & \xrightarrow{id_{\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)}} & \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \end{array}$$

Sappiamo che $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \cong \mathbb{Z}$ in quanto $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1$ e che $\pi_1(\mathbb{C}, L(1)) \cong \{0\}$. Per la commutatività del diagramma avremmo

$$(id)_* = (\exp \circ L)_* = \exp_* \circ L_* = 0 \circ L_* = 0,$$

che è assurdo dato che $\mathbb{Z} \neq \{0\}$. \square

Cerchiamo allora di invertire l'esponenziale su un sottodominio di \mathbb{C}^\times in modo continuo

Teorema 4.44 (Branche del logaritmo).

Sia $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ aperto connesso tale che l'inclusione $U \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ induca l'omomorfismo banale $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^\times)$ ⁵. Allora esiste una mappa detta **branca del logaritmo** continua

$$L : U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad e^{L(z)} = z \quad \forall z \in U.$$

Due tali branche che coincidono in un punto coincidono su tutto U .

Dimostrazione.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow L & \downarrow \exp \\ U & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

Sappiamo (3.88) che L esiste (ed è unico fissata l'immagine in $x_0 \in U$) se e solo se

$$i_*(\pi_1(\mathbb{C}^\times)) \subseteq \exp_*(\pi_1(\mathbb{C}))$$

e questo è vero perché i_* è l'omomorfismo banale per ipotesi (invocando il teorema abbiamo usato il fatto che \exp è un rivestimento (4.42)). \square

Definiamo allora un logaritmo standard:

Definizione 4.45 (Branca principale del logaritmo complesso).

Sia

$$U = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m(z) = 0 \text{ e } \Re e(z) \leq 0\}.$$

Chiaramente $U \subseteq \mathbb{C}^\times$ è semplicemente connesso quindi il teorema (4.44) garantisce l'esistenza di un logaritmo $L : U \rightarrow \mathbb{C}$, il quale è unico per l'unicità dei sollevamenti (3.75) se fissiamo $L(1) = 0$ (scelta lecita perché $\exp^{-1}(1) = \{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$).

Proposizione 4.46 (Formula esplicita per la branca principale del logaritmo).

Se L è la branca principale del logaritmo si ha che

$$L(z) = \log |z| + i \arg(z),$$

dove \log è il logaritmo reale e $\arg(z)$ è l'argomento principale di z , definito per esempio da

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \leq 0 \end{cases}$$

⁵Per esempio possiamo prendere U semplicemente connesso. L'idea geometrica è che non possiamo considerare un insieme che contenga lacci che si attorcigliano attorno l'origine.

Dimostrazione.

Per l'unicità dei sollevamenti (3.75) è sufficiente mostrare che $f(z) = \log|z| + i \arg(z)$ è una inversa destra di \exp , è continua e che $f(1) = 0$.

$\exp(f(z)) = z$ Calcoliamo

$$\begin{aligned} e^{f(z)} &= e^{\log|z|} e^{i \arg(z)} = \\ &= |z| \left(\cos \left(\arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sgn}(y) i \sin \left(\arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \right) = \\ &= |z| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \operatorname{sgn}(y) i \sin \left(\arcsin \left(\frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \right) = \\ &= |z| \left(\frac{z}{|z|} \right) = z \end{aligned}$$

Continua) Sappiamo che $\log(x)$ è continua, quindi basta verificare che $\arg(z)$ è continua. Osserviamo che $\{U \cap \{y \geq 0\}, U \cap \{y \leq 0\}\}$ è un ricoprimento fondamentale di U in quanto ricoprimento chiuso finito (2.178). In ogni pezzo \arg è definito da composizioni di continue, quindi è continua. Sull'intersezione entrambe le definizioni di \arg valgono identicamente 0, in particolare coincidono. Per definizione di ricoprimento fondamentale abbiamo che \arg è continua su U . $f(1) = L(1) = 0$ Segue dal fatto che $\arg(1) = 0$ e $\log 1 = 0$. \square

Proposizione 4.47 (Le branche del logaritmo sono olomorfe).

Le branche del logaritmo complesso sono olomorfe.

Dimostrazione.

Poiché $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ verifica $\exp'(z) = \exp(z)$ e non è mai nulla, si ha per le proprietà delle olomorfe (4.20) che le branche del logaritmo sono olomorfe. \square

Teorema 4.48 (Espansione in serie del logaritmo).

Sia $L : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \mid z \leq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ la branca principale del logaritmo. Allora per ogni $z \in B_1(0)$ abbiamo

$$L(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

Dimostrazione.

La serie in questione ha raggio di convergenza 1, quindi definisce una funzione $g : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa (vedi (4.26) e (4.29)). Inoltre $\exp(g(x)) = 1 + x$ per ogni $x \in B_1(0) \cap \mathbb{R}$ per noti risultati di analisi. Allora $\exp \circ g$ e $h(z) = 1 + z$ sono analitiche (la prima per (4.31), la seconda evidentemente) e coincidono su un insieme che contiene punti non isolati, dunque $\exp(g(z)) = 1 + z$ su $B_1(0)$ per il teorema (4.38). Questo mostra che $g(z)$ è un logaritmo di $1 + z$ su $B_1(0)$ e, poiché $g(0) = 0 = L(1 + 0)$, abbiamo per l'unicità dei sollevamenti (3.75) che $g(z) = L(1 + z)$ su $B_1(0)$. \square

4.5 1-Forme complesse

Definizione 4.49 (1-forma continua).

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto. Una **1-Forma** continua su U ⁶ è una funzione $\omega : U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e \mathbb{R} -lineare nel secondo argomento.

Di solito al posto di $\omega(z_0, v)$ si scrive $\omega(z_0)(v)$ o $\omega_{z_0}(v)$ per rimarcare il fatto che $\omega(z_0, \cdot)$ è una funzione \mathbb{R} -lineare.

Osservazione 4.50.

Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è C^1 allora df è una 1-forma, infatti

$$df(z, w) = df_z(w),$$

dove la continuità rispetto a z è la definizione di C^1 .

Definizione 4.51 (Forme esatte e chiuse).

Una 1-forma ω si dice **esatta** se esiste $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^1 tale che $\omega = df$. In tal caso f si chiama **primitiva** di $\omega = df$.

Una 1-forma ω su U si dice **chiusa** se è localmente esatta, cioè se per ogni $z_0 \in U$ esiste un intorno V di z_0 con $z_0 \in V \subseteq U$ tale che $\omega|_V$ è esatta, cioè esiste $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^1 con $\omega|_V \doteq \omega|_{V \times \mathbb{C}} = df$.

Osservazione 4.52.

Per definizione ogni forma esatta è chiusa.

Osservazione 4.53 (1-forme in coordinate).

Poiché $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ è un \mathbb{C} -spazio vettoriale e sia $\{dx, dy\}$ che $\{dz, d\bar{z}\}$ ne sono basi, possiamo scrivere ogni 1-forma ω su U nelle forme

$$\omega(x + iy) = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

dove $a, b : U \rightarrow \mathbb{C}$ sono continue oppure

$$\omega(z) = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$$

dove $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sono continue.

4.5.1 Integrazione di 1-forme

Definizione 4.54 (Integrale di funzione da intervallo reale a \mathbb{C}).

Se $f(t) = g(t) + ih(t)$ con $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ allora

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i \int_a^b h(t)dt.$$

Definizione 4.55 (Integrale lungo una curva C^1).

Sia ω una 1-forma su $U \subseteq \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un cammino C^1 . **L'integrale di ω lungo γ** è dato da

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt.$$

⁶sottointenderemo "continua" quasi sempre

Definizione 4.56 (Curva C^1 a tratti).

Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è C^1 **a tratti** se esiste una partizione $\{t_0, \dots, t_n\}$ ⁷ di $[a, b]$ tale che $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è C^1 per ogni i .

Osservazione 4.57 (Caso per curve C^1 a tratti).

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è C^1 a tratti poniamo

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

Proposizione 4.58 (Invarianza dell'integrale per riparametrizzazione).

Sia $\delta : [c, d] \rightarrow U$ una riparametrizzazione di γ , cioè $\delta = \gamma \circ \varphi$ con $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 con $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Allora

$$\int_{\delta} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Dimostrazione.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\delta} \omega &= \int_c^d \omega(\delta(t))(\delta'(t)) dt = \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)))(\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)) dt \stackrel{\text{linearità}}{=} \\ &= \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)))(\gamma'(\varphi(t)))\varphi'(t) dt \stackrel{s=\varphi(t)}{=} \\ &= \int_a^b \omega(\gamma(s))(\gamma'(s)) ds = \\ &= \int_{\gamma} \omega \end{aligned}$$

□

Proposizione 4.59 (Integrazione di 1-forme esatte).

Se ω è esatta con primitiva $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ allora

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dimostrazione.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è il teorema fondamentale del calcolo in una variabile applicato nelle due entrate. □

⁷Ricordiamo da Analisi 1 che una partizione ha la forma

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Corollario 4.60.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ è una curva C^1 a tratti chiusa e ω è una forma esatta su U allora $\int_\gamma \omega = 0$.

Esempio 4.61 (Forma chiusa non esatta).

Consideriamo la forma $\omega = \frac{1}{z} dz$ definita su \mathbb{C}^\times .

Chiusa) Segue dal fatto che il logaritmo è localmente olomorfo e la sua derivata è

$$L'(z) = \frac{1}{z}.$$

Non Esatta) Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ data da $\gamma(t) = e^{2\pi it}$. Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^1 e^{-2\pi it} 2\pi i e^{2\pi it} dt = 2\pi i \neq 0.$$

Poiché diremo spesso “aperto connesso” diamo la seguente

Definizione 4.62 (Dominio).

Un insieme $D \subseteq \mathbb{C}$ è un **dominio** se è aperto e connesso.

Osservazione 4.63.

Poiché \mathbb{C} è localmente connesso per archi si ha che un dominio è anche connesso per archi e localmente connesso per archi (2.219).

Proposizione 4.64 (Caratterizzazione esattezza con integrali su lacci).

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio e ω una 1-forma su D . Allora ω è esatta se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni γ laccio su D di classe C^1 a tratti.

Dimostrazione.

\implies) Segue immediatamente da (4.59).

\impliedby) Fissiamo $z_0 \in D$. Dato $z \in D$ sia $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow D$ una curva C^1 a tratti tale che $\gamma_z(0) = z_0$ e $\gamma_z(1) = z$. Poniamo $F(z) = \int_{\gamma_z} \omega$.

Osserviamo che $F(z)$ non dipende da γ_z ma solo da z , infatti se $\tilde{\gamma}_z$ è una seconda curva con le stesse proprietà osserviamo che $\gamma_z * \overline{\tilde{\gamma}_z}$ è una curva chiusa in D . Segue dunque che

$$0 = \int_{\gamma_z * \overline{\tilde{\gamma}_z}} \omega = \int_{\gamma_z} \omega - \int_{\tilde{\gamma}_z} \omega.$$

La funzione $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ è quindi ben definita.

Supponiamo che $\omega = Pdx + Qdy$ e mostriamo che F ne è una primitiva. Basta verificare che $dF(z) = \omega(z)$, cioè che $\frac{\partial F}{\partial x}(z) = P(z)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(z) = Q(z)$ per ogni $z \in D$. Calcoliamo $\frac{\partial F}{\partial x}(z)$, l'altra derivata si svolge in maniera analoga

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_{z+t}} \omega - \int_{\gamma_z} \omega \right),$$

dove t è pensata come una variabile reale ($z+t = z + t \cdot 1 = z + te_1$).

Per l'invarianza di F rispetto al cammino scelto supponiamo $\gamma_{z+t} = \gamma_z * \ell_{z,t}$, dove

$$\ell_{z,t} : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & z + st \end{array}.$$

Questa operazione è lecita se $\ell_{z,t}([0,1]) \subseteq D$, ma questo è il caso per $|t| < \varepsilon$ dove $\varepsilon > 0$ è tale che $B_\varepsilon(z) \subseteq D$. Consci di questa decomposizione abbiamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\ell_{z,t}} \omega = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Re(z)}^{\Re(z)+t} P(s, \Im(z)) ds \right) (0) = P(z).$$

□

Corollario 4.65 (Caratterizzazione di forme esatte in disco).

Se D è un disco allora ω è esatta in D se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni curva chiusa γ bordo di un rettangolo parallelo agli assi.

Dimostrazione.

\Rightarrow) Segue immediatamente da (4.59).

\Leftarrow) È la dimostrazione del teorema precedente dove ammettiamo solo γ “spigolosi”. L’unica cosa che può fallire è l’esistenza dei cammini da z_0 a z al variare di $z \in D$, ma è evidente che come γ_z possiamo scegliere due lati adiacenti opportuni del rettangolo con lati paralleli agli assi determinato da z_0 e z . □

Corollario 4.66.

Se D è un disco allora ω è esatta in D se e solo se ω è chiusa in D .

Dimostrazione.

\Rightarrow) Vale sempre.

\Leftarrow) Supponiamo che ω sia chiusa. Vogliamo mostrare che

$$\int_{\partial R} \omega = 0$$

per ogni R rettangolo con lati paralleli agli assi contenuto in D in modo da invocare la caratterizzazione (4.65). Siccome \bar{R} è compatto ammette numero di Lebesgue (2.402), possiamo quindi suddividerlo in un numero finito di rettangolini sui quali ω è esatta (considero un ricoprimento di \bar{R} di aperti dove ω è esatta, estraggo un numero di Lebesgue ε e divido R in rettangoli con diametro minore di ε). A questo punto

$$\int_{\partial R} \omega = \sum_j \int_{\partial R_j} \omega = \sum_j 0 = 0,$$

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che gli integrali lungo i segmenti interni vengono percorsi in entrambi i versi dando un contributo netto nullo. □

4.5.2 Primitive lungo curve e lungo omotopie

Lemma 4.67 (Numero di Lebesgue per forme chiuse).

Siano $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ continua e ω una 1-forma chiusa su D . Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $[c, d] \subseteq [a, b]$ e $d - c < \varepsilon$ allora esiste un disco $U \subseteq D$ tale che ω è esatta su U e $\gamma([c, d]) \subseteq U$. Per brevità diremo che ε è un **numero di Lebesgue** per ω sulla curva γ ⁸.

⁸Questa definizione NON è standard e NON è stata data durante il corso. L’ho data io per rendere più scorrevole il testo quando useremo questo lemma.

Dimostrazione.

Per ogni punto di $\gamma([a, b])$ consideriamo un disco centrato nel punto dove ω è esatta. L'insieme di questi dischi è un ricoprimento di $\gamma([a, b])$, dunque prendendo le preimmagini dei dischi troviamo un ricoprimento di $[a, b]$. Per la compattezza di $[a, b]$ il ricoprimento costruito ammette un numero di Lebesgue ε (2.288). Questo è l' ε cercato. \square

Definizione 4.68 (Primitiva lungo una curva).

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ continua. Sia $\omega = Pdx + Qdy$ una 1-forma chiusa su D . Una **primitiva** per ω **lungo** γ è una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che per ogni $t_0 \in [a, b]$ esistono $U \subseteq D$ intorno aperto di $\gamma(t_0)$ e $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ primitiva di ω su U tale che $F(\gamma(t)) = f(t)$ per ogni $t \in \gamma^{-1}(U)$.⁹

Teorema 4.69 (Esistenza e quasi unicità delle primitive lungo curve).

Per ogni $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ continua e per ogni 1-forma ω chiusa su D esiste una primitiva di ω lungo γ , che è unica a meno di costanti additive.

Dimostrazione.

Unicità) Siano f, g due primitive di ω lungo γ . Fissiamo $t_0 \in [a, b]$. Poiché ω è chiusa esistono due intorni di $\gamma(t_0)$ dove ω ammette primitive F e G tali che

$$F(\gamma(t)) = f(t) \quad e \quad G(\gamma(t)) = g(t).$$

A meno di intersecare questi intorni e prendere la componente connessa¹⁰ contenente $\gamma(t_0)$, definiamo U intorno connesso di $\gamma(t_0)$ tale che F e G sono delle primitive di ω su U come sopra. Poiché F e G sono primitive di ω su U connesso si ha che $F - G = c$ su U con c costante¹¹, dunque $f(t) - g(t) = c$ per $t \in \gamma^{-1}(U)$. Questo mostra che $f - g$ è localmente costante su $[a, b]$, che è connesso, dunque $f - g$ è costante su tutto $[a, b]$ come voluto.

Esistenza) Per il lemma (4.67) esiste ε numero di Lebesgue per ω su γ . A questo punto consideriamo

$$a = a_0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < \dots < a_n < b_{n-1} < b_n = b$$

tali che $I_0 = [a_0, b_0]$, $I_j = (a_j, b_j)$ e $I_n = (a_n, b_n]$ siano intervalli di ampiezza minore di ε . Osserviamo dunque che $\gamma(I_j) \subseteq U_j$ con U_j disco aperto su cui ω ammette primitiva. Definiamo f ricorsivamente:

Per $t \in I_0$ poniamo $f(t) = F_0(\gamma(t))$ dove F_0 è una qualche primitiva di ω su U_0 . Supponendo ora di aver definito f su $I_0 \cup \dots \cup I_{k-1}$, per $t \in I_k$ definiamo

$$f(t) = F_k(\gamma(t)),$$

dove F_k è la primitiva di ω su U_k per la quale

$$F_{k-1}|_{U_{k-1} \cap U_k} = F_k|_{U_{k-1} \cap U_k},$$

che esiste ed è unica per l'unicità delle primitive su connessi a meno di costante ($U_k \cap U_{k-1}$ è connesso perché intersezione di dischi).

⁹Ricordo che la notazione che uso in queste dispense assegna il simbolo $\bar{\gamma}$ al cammino inverso. Con $\gamma^{-1}(U)$ intendo la preimmagine di U tramite la mappa $\gamma : [a, b] \rightarrow D$

¹⁰La componente connessa è un intorno perché \mathbb{C} è localmente connesso per archi (2.221).

¹¹Abbiamo che $d(F - G) = dF - dG = \omega - \omega = 0$ su U connesso, dunque $F - G$ è costante. Per i dettagli vedi Analisi 2.

Al termine dell'induzione avremo definito f su $I_0 \cup \dots \cup I_n$. Per concludere basta osservare che $\{I_i\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ è un ricoprimento fondamentale di $[a, b]$ in quanto ricoprimento aperto (2.168), che $f|_{I_i} = F_i \circ \gamma|_{I_i}$ e quindi è continua su ogni elemento del ricoprimento, e che sulle intersezioni dei membri del ricoprimento f è ben definita. Per il criterio (2.170) f è continua. \square

Definizione 4.70 (Primitiva lungo una omotopia).

Siano $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ una omotopia fra γ_0 e γ_1 e ω una 1-forma chiusa su D . Una **primitiva di ω lungo H** è $f : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ tale che per ogni $(s_0, t_0) \in [0, 1] \times [a, b]$ esistono $U \subseteq D$ intorno di $H(s_0, t_0)$ e $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ primitiva di ω tale che $F(H(s, t)) = f(s, t)$ per ogni $(s, t) \in H^{-1}(U)$.

Osservazione 4.71.

La restrizione di f primitiva lungo una omotopia ai segmenti orizzontali o verticali restituisce una primitiva di ω lungo la curva corrispondente.

Teorema 4.72 (Esistenza e quasi unicità delle primitive lungo omotopie).

Se ω è una 1-forma chiusa allora ammette una primitiva lungo qualsiasi omotopia $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$.

Dimostrazione (DATA PER ESERCIZIO).

Unicità) Date due primitive f e g di ω lungo H osserviamo che in un opportuno intorno connesso di $H(s_0, t_0)$ queste due corrispondono alla composizione di due primitive di ω con H , in particolare per l'unicità delle primitive a meno di costante si deve avere che f e g differiscono localmente di una costante. Questo mostra che $f - g$ è localmente costante su $[0, 1] \times [a, b]$, che è connesso.

Esistenza) A meno di modificare qualche parola nella dimostrazione, vale ancora il lemma (4.67) e a questo punto basta dividere $[0, 1] \times [a, b]$ in rettangoli abbastanza piccoli e ricalcare la dimostrazione di esistenza per (4.69). \square

Corollario 4.73 (Integrazione di forme chiuse tramite primitiva lungo curve).

Se ω è chiusa, γ è C^1 a tratti e f è primitiva di ω lungo γ allora

$$\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a).$$

Dimostrazione.

Per il lemma (4.67) suddividiamo γ in tratti $\gamma_j : [a_j, a_{j+1}] \rightarrow D$ per cui esiste una primitiva F_j in un intorno dell'immagine di γ_j . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \sum_j \int_{\gamma_j} \omega = \sum_j (F_j(\gamma(a_{j+1})) - F_j(\gamma(a_j))) = \\ &= \sum_j (f(a_{j+1}) - f(a_j)) = \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

\square

Se γ è continua ma non C^1 a tratti diamo come definizione di integrale quella che mantiene vero questo risultato

Definizione 4.74 (Integrale di 1-forme chiuse su cammini continui).

Data ω una forma chiusa su U e $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, allora, detta f una primitiva di ω lungo γ , definiamo

$$\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a).$$

Teorema 4.75 (Invarianza dell'integrale per cammini omotopi).

Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ curve omotope a estremi fissi e ω chiusa su D . Allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Dimostrazione.

Sia $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ omotopia a estremi fissi fra γ_0 e γ_1 e sia $f : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una primitiva di ω lungo H . Allora $s \mapsto f(s, a)$ è una primitiva di ω lungo la curva costante $s \mapsto H(s, a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ (la curva è costante perchè H è a estremi fissi). Questo implica che $f(\cdot, a) = \alpha \in \mathbb{C}$ costante. Analogamente $f(\cdot, b) = \beta \in \mathbb{C}$.

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \omega &= \int_{H(0, \cdot)} \omega = \\ &= f(0, b) - f(0, a) = \\ &= \beta - \alpha = \\ &= f(1, b) - f(1, a) = \\ &= \int_{H(1, \cdot)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega. \end{aligned}$$

□

4.5.3 Forme chiuse da funzioni olomorfe

Da questo momento in poi nel corso la definizione di “funzione olomorfa” diventerà implicitamente “funzione olomorfa e C^1 ”. Il motivo verrà reso chiaro tra qualche risultato.

Citiamo il

Teorema 4.76 (Gauss-Green).

Sia $\omega = Pdx + Qdy$ una 1-forma C^1 nell'intorno di un rettangolo \bar{R} con lati paralleli agli assi. Allora

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial R} \omega.$$

Dimostrazione.

NON DATA DURANTE IL CORSO.

□

Osservazione 4.77.

Se $\omega = Adz + Bd\bar{z}$ allora

$$\iint_R \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \right) dz d\bar{z} = \int_{\partial R} \omega.$$

Teorema 4.78 (Caratterizzazione delle forme chiuse C^1 con derivate parziali).
 Sia $\omega = Pdx + Qdy$ una 1-forma C^1 su D dominio. Allora

$$\omega \text{ chiusa} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dimostrazione.

\implies) ω chiusa implica che localmente $P = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$, dove F è una primitiva locale. Allora

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

dove abbiamo potuto scambiare le derivate perché $\omega \in C^1 \implies F \in C^2$ e vale il teorema di Schwarz¹².

\impliedby) Per Gauss-Green (4.76)

$$\int_{\partial R} \omega = 0$$

per ogni rettangolo R con lati paralleli agli assi contenuto in D . Quindi per (4.65) ω è localmente esatta, cioè chiusa. \square

Corollario 4.79 (fdz chiusa se e solo se f olomorfa).

Sia $f \in C^1(D)$. Allora $\omega = fdz$ è chiusa se e solo se f è olomorfa.

Dimostrazione.

Se $f = u + iv$ allora $fdz = (udx - vdy) + i(udy + vdx)$. Per il teorema sopra (4.78) abbiamo che ω è chiusa se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x},$$

cioè, separando parte reale e immaginaria, se e solo se valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, cioè f olomorfa. \square

Corollario 4.80.

La forma fdz è esatta in D se e solo se esiste $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $F' = f$.

Dimostrazione.

La forma fdz è esatta se e solo se esiste F tale che $dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = fdz$, quindi se e solo se

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f.$$

\square

In realtà una implicazione della caratterizzazione (4.79) vale anche senza supporre f di classe C^1 .

Teorema 4.81 (Cauchy).

Se f è olomorfa allora fdz è chiusa.

Dimostrazione.

È STATO DIMOSTRATO NEGLI ANNI PASSATI. \square

¹²Vedi Analisi 2

Poiché l'implicazione (4.81) non è stata dimostrata, la trattazione che segue è rigorosa solo se sostituiamo la parola "olomorfa" con "olomorfa C^1 ". Per rendere più generali le dispense procederò invocando quando necessario il teorema di Cauchy (4.81) quando il corso ha usato l'analogo per le C^1 . Se preferite attenervi solo a ciò che è stato dimostrato considerate solo funzioni olomorfe di classe C^1 e sostituite ogni riferimento a (4.81) con un riferimento a (4.79).

Concludiamo la sezione fornendo un utile risultato sull'estensione dell'olomorfia.

Teorema 4.82 (Continua olomorfa fuori un segmento dà forma chiusa).

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f continua in D e olomorfa fuori da un segmento $L \subseteq D$. Allora $\int_D f dz$ è chiusa in D .

Dimostrazione.

A meno di rotazioni supponiamo L orizzontale (basta ruotare anche le primitive locali). Poiché essere chiusi è una proprietà locale possiamo supporre che D sia un disco centrato in un punto $z_0 \in L$. Inoltre, a meno di traslazioni supponiamo $z_0 = 0$ e $L = D \cap \{\text{asse } x\}$.

Vogliamo verificare che $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ dove $\bar{R} \subseteq D$ è un rettangolo con lati paralleli agli assi per invocare (4.65) e trovare la tesi.

$\bar{R} \cap L = \emptyset$) In questo caso f è olomorfa in un intorno di \bar{R} quindi $\int_{\partial R} f dz$ è chiusa (4.81). Poiché ∂R è omotopo al cammino costante si ha che l'integrale è nullo per (4.75).

lato di R in L) Senza perdita di generalità supponiamo $R \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m(z) > 0\}$. Sia $\delta > 0$ e sia $R_\delta = R \cap \{\Im m(z) > \delta\}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f dz - \int_{\partial R_\delta} f dz &= \int_a^b f(x, 0) dx + i \int_0^\delta f(b, y) dy + \\ &\quad - \int_a^b f(x, \delta) dx - i \int_0^\delta f(a, y) dy = \\ &= \int_a^b (f(x, 0) - f(x, \delta)) dx + i \int_0^\delta (f(b, y) - f(a, y)) dy. \end{aligned}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché siamo in un compatto f è uniformemente continua (2.293), dunque esiste $\delta < \varepsilon$ tale che $|z - \zeta| < \delta \implies |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$ per ogni $z, \zeta \in \bar{R}$. Inoltre, ponendo $M = \max_{z \in R} |f(z)| \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f dz - \int_{\partial R_\delta} f dz \right| &\leq \int_a^b |f(x, 0) - f(x, \delta)| dx + \int_0^\delta |f(b, y) - f(a, y)| dy \leq \\ &\leq \varepsilon(b-a) + 2M\delta \stackrel{\delta < \varepsilon}{\leq} \varepsilon(2M + b-a). \end{aligned}$$

Poiché $\int_{\partial R_\delta} f dz = 0$ per il caso precedente abbiamo mostrato che

$$\left| \int_{\partial R} f dz \right| \leq \varepsilon(2M + b-a) \rightarrow 0.$$

$L \cap R \neq \emptyset$) Basta spezzare R in due rettangoli lungo L e sfruttare il caso precedente per entrambi. \square

Corollario 4.83.

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f continua in D e olomorfa C^1 fuori da un segmento $L \subseteq D$. Allora f è olomorfa in D .

Dimostrazione.

Il teorema sopra unito a (4.79). □

4.6 Indice di avvolgimento e Formula di Cauchy

Definizione 4.84 (Indice di avvolgimento).

Sia γ una curva chiusa in \mathbb{C} e sia z_0 un punto che NON appartiene al supporto di γ ($z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$). Allora l'**indice di avvolgimento** di γ attorno z_0 è dato da

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Osservazione 4.85.

La forma $\frac{dz}{z - z_0}$ è chiusa in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, quindi ammette primitiva lungo γ anche se γ è continua ma non C^1 (4.69). L'integrale nella definizione di $\text{Ind}(\gamma, z_0)$ è quindi ben definito anche se γ non è C^1 a tratti.

Proposizione 4.86 (Indice di avvolgimento è intero).

Per ogni z_0 e per ogni curva continua γ che non passa per z_0 si ha che

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione.

Caso di un giro) Se $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ e $r > 0$ allora

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 1.$$

Caso generale) Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ e poniamo $p = \gamma(0)$. Per ipotesi $z_0 \neq p$. Sia

$$\langle \alpha \rangle = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, p) \cong \mathbb{Z},$$

dove α è un generatore del gruppo fondamentale. Possiamo per esempio scegliere $\alpha = [\gamma_1]$ dove $\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$ con $r = |z_0 - p|$.

Per come è fatto il gruppo $(\mathbb{Z}, +)$, esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che

$$[\gamma] = n\alpha = n[\gamma_1] = \underbrace{[\gamma_1 * \dots * \gamma_1]}_{n \text{ volte}} = [\gamma_n],$$

dove $\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ è la curva $\gamma_n(t) = z_0 + re^{int}$. Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \stackrel{\text{omot.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{dz}{z - z_0} = n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} = n$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal caso trattato sopra. □

Osservazione 4.87.

Intuitivamente $\text{Ind}(\gamma, z_0)$ conta quante volte γ "gira attorno a z_0 ".

Teorema 4.88 (Formula integrale di Cauchy).

Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{O}(D)$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ una curva chiusa omotopa ad una curva costante. Sia $z \in D \setminus \gamma([0, 1])$. Allora¹³

$$\text{Ind}(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dimostrazione.

Definiamo per $\zeta \in D$

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Poiché f è olomorfa, $g \in \mathcal{O}(D \setminus \{z\}) \cap C^0(D)$, infatti è continua per definizione di $f'(z)$ tramite rapporto incrementale ed è olomorfa fuori z perché composizione di olomorfe. Si ha dunque che $gd\zeta$ è una forma chiusa per (4.82). Segue che

$$\int_{\gamma} g(\zeta)d\zeta \stackrel{\text{omot.}}{=} \int_{\text{punto}} g(\zeta)d\zeta = 0,$$

quindi

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Segue dunque che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \text{Ind}(\gamma, z)f(z).$$

□

Osservazione 4.89.

Dal teorema segue immediatamente che una funzione olomorfa definita su un disco è completamente determinata dal suo valore sul bordo del disco.

4.6.1 Olomorfa implica analitica

Finalmente possiamo mostrare la corrispondenza biunivoca tra funzioni olomorfe e analitiche. Questo ci permetterà di ignorare problemi di regolarità sulle olomorfe dato che saranno C^∞ (eccetto la questione su C^1 che abbiamo già discusso nella sezione precedente).

Come primo passo diamo un potente risultato di rigidità:

Teorema 4.90 (Continue sul bordo di un disco definiscono olomorfa nel disco).

Sia $B = B(z_0, R)$ e $h : \partial B \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ data da $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ e poniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Allora abbiamo che

¹³Qui e in futuro useremo ζ quando z è già occupato. Quindi per $d\zeta$ intendiamo comunque $dx + idy$.

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ serie di potenze con raggio di convergenza maggiore o uguale a R .

$$2. a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

In particolare $f \in \mathcal{O}(B)$ e $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Dimostrazione.

Caso $z_0 = 0$ Se $\zeta \in \partial B$ e $z \in B$ allora $R = |\zeta| > |z|$, da cui $\left| \frac{z}{\zeta} \right| < 1$. Vale dunque la seguente identità

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}},$$

inoltre la serie converge assolutamente e uniformemente in ζ , infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{R^{n+1}} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{R} \right)^n = \frac{1}{R - |z|} \in \mathbb{R},$$

che non dipende da ζ .

Allora

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\zeta) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} h(\zeta) \right) d\zeta \stackrel{\text{conv. unif. su limitato}}{=} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^k \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} h(\zeta) \right) d\zeta = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{\doteq a_n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \end{aligned}$$

che mostra entrambi i punti¹⁴.

Caso generale) Poniamo $g(w) = f(w + z_0)$, $z = w + z_0$ e $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - z_0$. Per il punto precedente

$$f(z) = g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{h(\zeta + z_0)}{\zeta - w} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Sostituendo in a_n troviamo la formula voluta:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{h(\zeta + z_0)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

□

¹⁴Per i dettagli su perché possiamo scambiare limite e integrale vi rimando ad Analisi 2.

Corollario 4.91 (Una funzione olomorfa è analitica).

Dati $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{O}(D)$ e $\bar{B} = \overline{B(z_0, R)} \subseteq D$ si ha che

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con raggio di convergenza maggiore o uguale a R

2. Posto $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ si ha che

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Dimostrazione.

Osserviamo che $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$ per ogni $z \in B$. Per la formula integrale di Cauchy (4.88) si ha dunque che

$$f(z) = \text{Ind}(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

e quindi per il teorema (4.90) abbiamo che su B vale l'identità

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

□

Proprietà delle olomorfe ereditate dalle analitiche

Corollario 4.92 (Proprietà delle olomorfe ereditate dalle analitiche).

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{O}(D)$ e $\bar{B} = \overline{B(z_0, R)} \subseteq D$, allora

1. $f \in C^\infty(D)$
2. Per ogni $z \in B$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z) = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

dove $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$.

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $f^{(n)} \in \mathcal{O}(D)$

Dimostrazione.

1) Per il teorema (4.91) f è analitica e quindi C^∞ .

2) Si ottiene per induzione su n derivando la formula di Cauchy:

$n = 0$ È la formula integrale di Cauchy (4.88) dove osserviamo che $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$.

$n \implies n+1$) Calcoliamo:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \frac{\partial f^{(n)}(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} n! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\zeta-z} \right)^{n+1} d\zeta = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{n+1}{(\zeta-z)^{n+2}} d\zeta = \\ &= (n+1)! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}} d\zeta. \end{aligned}$$

3) Poiché f è olomorfa allora è analitica (4.91), quindi anche $f^{(n)}$ è analitica (4.28) e dunque è olomorfa (4.29). \square

Data l'importanza della seguente proprietà ereditata dalle analitiche la isoliamo in una proposizione:

Proposizione 4.93 (Principio di identità).

Sia D un dominio e siano $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe. Se f e g coincidono su un aperto allora coincidono su tutto D .

Dimostrazione.

È il principio di identità per le analitiche (4.38). \square

4.7 Applicazioni

4.7.1 Disuguaglianze di Cauchy e Teorema di Liouville

Notazione 4.94.

Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in D$, $\bar{B} = \overline{B(z_0, R)} \subseteq D$ e f olomorfa su D . Per ogni $r \leq R$ poniamo

$$M(r) = \max \{ |f(z)| \mid |z - z_0| = r \} = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \{ |f(z)| \}.$$

Proposizione 4.95 (Disuguaglianze di Cauchy).

Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in D$, $\bar{B} = \overline{B(z_0, r)} \subseteq D$ e f olomorfa su D . Allora

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}.$$

Dimostrazione.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z_0) \right| &\stackrel{(4.91)}{=} \left| n! \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + re^{it}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| = \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} ire^{it} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{n!}{r^n 2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq \\ &\leq \frac{n!}{r^n} M(r). \end{aligned}$$

\square

Osservazione 4.96.

Le disuguaglianze di Cauchy danno una maggiorazione di $|f^{(n)}(z_0)|$ in termini di n , r e il massimo che f assume sul BORDO del disco di raggio r centrato in z_0 .

Corollario 4.97 (Teorema di Liouville).

Ogni funzione limitata olomorfa su \mathbb{C} ¹⁵ è costante.

Dimostrazione.

Per l'ipotesi di limitatezza esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \geq |f(z)|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora per ogni $r > 0$ abbiamo che

$$M(r) = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \{|f(z)|\} \leq M.$$

Per le disuguaglianze di Cauchy (4.95) si ha che per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

Per $r \rightarrow +\infty$ abbiamo dunque che $f^{(n)}(z_0) = o(1)$, ma dato che $f^{(n)}(z_0)$ non dipende da r abbiamo necessariamente che $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, cioè la tesi. \square

Corollario 4.98 (Teorema fondamentale dell'algebra).

Ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ di grado $n \geq 1$ ha esattamente n radici distinte contate con molteplicità.

Dimostrazione.

Per come si fattorizzano i polinomi basta mostrare che ne ha almeno una e reiterare. Supponiamo dunque per assurdo che p non abbia radici. Allora per (4.21)

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}),$$

inoltre, poiché $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty$, abbiamo che $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = 0$. In particolare abbiamo che $|f|$ è limitata perché infinitesima continua. Per il teorema di Liouville (4.97) f è costante, quindi p è costante che è assurdo per ipotesi sul grado. \square

4.7.2 Principio della media

Definizione 4.99 (Proprietà della media).

Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ soddisfa la **proprietà della media** se per ogni $z_0 \in D$ esiste $r_0 > 0$ tale che $\overline{B_{r_0}(z_0)} \subseteq D$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha che

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Proposizione 4.100 (Proprietà della media implica continua).

Se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ soddisfa la proprietà della media allora è continua.

¹⁵Le funzioni olomorfe su \mathbb{C} si dicono **intere**.

Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).

□

Teorema 4.101 (Principio della media).

Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in \mathcal{O}(D)$ e $\overline{B} = \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

in particolare f soddisfa la proprietà della media.

Dimostrazione.

Poniamo $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Per la formula integrale di Cauchy (4.88) si ha che

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} i re^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \end{aligned}$$

□

Osservazione 4.102.

Nelle ipotesi del teorema, anche $\Re(f)$ e $\Im(f)$ soddisfano la proprietà della media.

Dimostrazione.

Basta prendere la parte reale e la parte immaginaria di entrambi i membri nell'identità

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

□

Osservazione 4.103 (Proprietà della media su area).

Nelle ipotesi del teorema vale

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B f(z) dx dy.$$

Dimostrazione.

NON DATA DURANTE IL CORSO.

□

4.7.3 Principio del massimo

Teorema 4.104 (Principio del massimo 1).

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con la proprietà della media. Supponiamo che esista $z_0 \in D$ massimo locale per $|f|$ (oppure per f se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$). Allora f è costante in un intorno di z_0 .

Dimostrazione.

Osserviamo che per (4.100) si ha che f è continua.

Caso $|f|$) Riconduciamoci al caso $f(z_0) \in \mathbb{R}^+$:

Se $|f(z_0)| = 0$ la tesi è ovvia. Supponiamo dunque che $|f(z_0)| > 0$. A meno di moltiplicare per un qualche $e^{i\theta}$ (che ha modulo 1) possiamo supporre $f(z_0) \in \mathbb{R}$ e $f(z_0) > 0$ lasciando $|f|$ invariata.

Fissiamo ora $r_0 > 0$ che realizza la proprietà della media in z_0 e per il quale $f(z_0)$ è massimo assoluto di $|f|$ in $B_{r_0}(z_0)$.

Per $r \in (0, r_0)$ poniamo come usuale

$$M(r) = \max \{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\} = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \{|f(z)|\}.$$

Evidentemente $M(r) \leq f(z_0)$ per definizione di r_0 ($|f(z_0)|$ massimo), eppure

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + re^{it})}_{\in \partial B(z_0, r)} dt \implies f(z_0) = |f(z_0)| \leq M(r),$$

dunque $M(r) = f(z_0)$ per ogni $0 < r < r_0$. Allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r) dt = M(r) = f(z_0) = \Re(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(f(z_0 + re^{it})) dt,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M(r) - \Re(f(z_0 + re^{it}))) dt = 0.$$

Ricordiamo però che $M(r) \geq |f(z_0 + re^{it})| \geq \Re f(z_0 + re^{it})$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, quindi l'integrando è non negativo ma si integra a zero. Segue che $\Re(f(z_0 + re^{it})) = M(r)$ Lebesgue-quasi ovunque, ma dato che queste funzioni sono continue in t si ha che sono proprio uguali. Si ha quindi che

$$\Re(f(z_0 + re^{it})) = M(r) = f(z_0) \implies \Re(f) = f(z_0) \text{ su } B_{r_0}(z_0).$$

Se $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ abbiamo concluso. Altrimenti osserviamo anche che

$$\begin{aligned} M(r) &\geq \sqrt{(\Re(f(z_0 + re^{it})))^2 + (\Im(f(z_0 + re^{it})))^2} = \\ &= \sqrt{M(r)^2 + (\Im(f(z_0 + re^{it})))^2} \geq \\ &\geq M(r), \end{aligned}$$

da cui $\Im(f) = 0$, che è costante come volevamo.

caso $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ Riconduciamoci al caso $f(z_0) \in \mathbb{R}^+$:

Sostituiamo f con $f + 2|f(z_0)|$, infatti se questa è costante chiaramente lo è anche f .

Fissiamo ora $r_0 > 0$ che realizza la proprietà della media in z_0 e per il quale $f(z_0)$ è massimo assoluto di f in $B_{r_0}(z_0)$.

Per $r \in (0, r_0)$ poniamo come usuale

$$M(r) = \max \{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\} = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \{|f(z)|\}.$$

Evidentemente $M(r) \leq f(z_0)$ per definizione di r_0 ($f(z_0)$ massimo), eppure

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + re^{it})}_{\in \partial B(z_0, r)} dt \implies f(z_0) = |f(z_0)| \leq M(r),$$

dunque $M(r) = f(z_0)$ per ogni $0 < r < r_0$. Allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r) dt = M(r) = f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M(r) - f(z_0 + re^{it})) dt = 0.$$

Ricordiamo però che $M(r) \geq f(z_0 + re^{it})$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, quindi l'integrando è non negativo ma si integra a zero. Segue che $f(z_0 + re^{it}) = M(r)$ Lebesgue-quasi ovunque, ma dato che queste funzioni sono continue in t si ha che sono proprio uguali. Si ha quindi che

$$f(z_0 + re^{it}) = M(r) = f(z_0) \implies f = f(z_0) \quad \text{su } B_{r_0}(z_0),$$

in particolare f è costante. □

Corollario 4.105 (Olomorfa con massimo locale in modulo o per componente è costante).

Se $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio e $f \in \mathcal{O}(D)$ è tale che esiste $z_0 \in D$ punto di massimo locale per $|f|$ (oppure $\Re(f)$ oppure $\Im(f)$) allora f è costante.

Dimostrazione.

Per le olomorfe vale il principio della media (4.101) e quindi possiamo applicare il principio del massimo (4.104) a $|f|$, $\Re(f)$ e $\Im(f)$. Se siamo nel caso $|f|$ allora abbiamo già la tesi invocando il teorema (4.104) e il principio di identità (4.93), se invece siamo nel caso $\Re(f)$ o $\Im(f)$ abbiamo appena mostrato che una delle due è costante. Poiché f è olomorfa valgono le equazioni di Cauchy-Riemann (4.19), quindi $\Re(f)$ costante implica

$$\frac{\partial \Im(f)}{\partial y} = \frac{\partial \Re(f)}{\partial x} = \frac{\partial \Re(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \Im(f)}{\partial x} = 0,$$

e analogamente $\Im(f)$ costante implica $\Re(f)$ costante. □

Corollario 4.106 (Principio del massimo 2).

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio limitato. Sia $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\overline{D})$. Poniamo

$$M = \max_{x \in \partial D} |f(z)|.$$

Allora

1. $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in D$
2. se esiste $z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| = M$ allora f è costante.

Valgono anche risultati analoghi per $\Re(f)$ e $\Im(f)$ al posto di $|f|$.

Dimostrazione.

Sia $M' = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$.

Poiché $\partial D \subseteq \overline{D}$ si ha che $M \leq M' \in \mathbb{R}$. Sia $x \in \overline{D}$ che realizza $|f(x)| = M'$.

Se $x \in D$ allora è un massimo globale per $|f|$, dunque f è costante per (4.105) e la tesi è banale.

Se $x \in \partial D$ allora $M' = M$. Da questo segue immediatamente che $|f(z)| \leq M' = M$ e se $z_0 \in D$ è tale che $|f(z_0)| = M = M'$ allora è un massimo locale per $|f|$ e per (4.105) è costante. □

Osservazione 4.107.

L'ipotesi di limitatezza è necessaria. Consideriamo per esempio

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \quad \text{e} \quad f(z) = e^z.$$

Evidentemente e^z è olomorfa e continua su D perché restrizione di olomorfa su \mathbb{C} . Osserviamo che $|f|_{\partial D} = 1$ ma $\sup_{z \in D} |f(z)| = +\infty$.

Il problema è il comportamento nel punto all'infinito.

Osservazione 4.108.

Nel caso $\Re(f)$ e $\Im(f)$ valgono anche dei principi del minimo. Basta applicare il principio del massimo a $-\Re(f)$ e $-\Im(f)$.

Teorema 4.109 (Teorema dell'applicazione aperta).

Ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ non costante è una mappa aperta.

Dimostrazione.

Basta mostrare che per ogni $z_0 \in D$, $f(D)$ è un intorno di $f(z_0)$.

Possiamo definire una palla $\bar{B} = \bar{B}_r(z_0) \subseteq D$ tale che $f(z) \neq f(z_0)$ per ogni $z \in B \setminus \{z_0\}$, infatti se non potessimo f sarebbe costante su un aperto e quindi per il principio di identità (4.93) sarebbe costante su D che è connesso, contraddicendo le ipotesi.

A meno di traslazione supponiamo $f(z_0) = 0$.

Definiamo $\delta = \min_{\partial B} |f(z)| > 0$ e consideriamo $w \in \mathbb{C} \setminus f(D)$. Vogliamo mostrare che $|w| \geq \frac{1}{2}\delta$, infatti in questo caso avremmo $B_{\frac{1}{2}\delta}(0) \subseteq f(D)$ e quindi $f(D)$ sarebbe un intorno di $f(z_0) = 0$:

Se $|w| \geq \delta$ allora $|w| \geq \frac{1}{2}\delta$ e abbiamo finito.

Se $|w| < \delta$ procediamo come segue: Poniamo

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad \begin{matrix} |w| < \min_{z \in \partial B} |f(z)| \\ \in \end{matrix} \mathcal{O}(D).$$

Per il principio del massimo (4.106) abbiamo che

$$\frac{1}{|w|} = |\phi(z_0)| \stackrel{\text{max2}}{\leq} \sup_{x \in \partial B} |\phi(z)| = \frac{1}{\min_{z \in \partial B} |f(z) - w|}.$$

Per ogni $z \in \partial B$ si ha

$$|f(z) - w| \geq |f(z)| - |w| \geq \delta - |w|,$$

che, passando al minimo in ∂B , restituisce

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - w| \geq \delta - |w|$$

da cui

$$\frac{1}{\delta - |w|} \geq \frac{1}{\min_{z \in \partial B} |f(z) - w|} \geq \frac{1}{|w|} \iff |w| \geq \frac{1}{2}\delta$$

come voluto. □

4.8 Singolarità

Definizione 4.110 (Singolarità).

Se $f \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ allora z_0 è una **singolarità** per f .

Definizione 4.111 (Corona).

Dati $0 \leq r < R \leq +\infty$, l'**anello** (o **corona**) definito da r e R è l'insieme

$$A(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}.$$

Se $r > R$ poniamo $A(r, R) = \emptyset$.

Osservazione 4.112.

Esempi particolari di anelli sono $A(0, R) = B(0, R) \setminus \{0\}$, $A(r, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r)}$ e $A(0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Lemma 4.113.

Se $f \in \mathcal{O}(A(r, R))$ allora dato $\rho \in (r, R)$, $\int_{\rho e^{2\pi i t}} f dz$ non dipende da ρ .

Dimostrazione.

Siano $\gamma_1(t) = \rho_1 e^{2\pi i t}$, $\gamma_2(t) = \rho_2 e^{2\pi i t}$, $\delta(t) = \rho_1 + t(\rho_2 - \rho_1)$ e $\tilde{\gamma}_2 = \delta * \gamma_2 * \bar{\delta}$. Allora

$$\int_{\gamma_1} f dz \stackrel{\text{omot.}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_2} f dz = \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\delta} f dz - \int_{\delta} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

□

Lemma 4.114.

Sia $f \in \mathcal{O}(A(r, R))$ e $z_0 \in A(r, R)$. Siano $\rho_1 < \rho_2$ e $r < \rho_1 < |z_0| < \rho_2 < R$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

Dimostrazione.

Definiamo la seguente funzione

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Osserviamo che $g \in \mathcal{O}(A(r, R))$ in quanto composizione di olomorfe su $A(r, R) \setminus \{z_0\}$ e continua su tutto $A(r, R)$ (abbiamo usato (4.83)). Per il lemma precedente (4.113) si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta &= \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} g(\zeta) d\zeta = \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} g(\zeta) d\zeta = \\ &= \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta, \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = f(z_0) \left(\int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \right).$$

Osserviamo che per definizione

$$1 = \text{Ind}(\rho_2 e^{2\pi i t}, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$$

$$0 = \text{Ind}(\rho_1 e^{2\pi i t}, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0},$$

quindi

$$\int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = f(z_0)(2\pi i - 0)$$

come volevasi dimostrare. \square

4.8.1 Serie di Laurent

Poiché le serie di potenze convergono in un intero disco non possono essere lo strumento adatto per catturare le singolarità. Consideriamo allora una generalizzazione delle serie di potenze che ammette potenze negative, ovvero le serie di Laurent.

Definizione 4.115 (Serie di Laurent).

Una **serie di Laurent** centrata in z_0 è un'espressione della forma

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

con $a_n \in \mathbb{C}$.

Diremo che f è **convergente** se

$$f_+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad f_- = \sum_{m=0}^{\infty} a_{-m} \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^m$$

sono convergenti.

Osservazione 4.116 (Le serie di Laurent convergono in un anello).

Data f serie di Laurent proviamo a capire dove converge assolutamente.

Per ciò che sappiamo sulle serie di potenze si ha che f_+ converge assolutamente in un disco. Sia R il raggio di questo disco.

Possiamo interpretare f_- come una serie di potenze nelle $\frac{1}{z - z_0}$ e questo restituisce un raggio di convergenza assoluta $\frac{1}{r}$, cioè f_- converge assolutamente se

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{r} \iff |z - z_0| > r.$$

Mettendo insieme queste informazioni abbiamo che f converge assolutamente nell'anello

$$z_0 + A(r, R).$$

Osserviamo che se $r > R$ allora f non converge perché in ogni punto una tra f_+ e f_- non converge.

Proposizione 4.117 (proprietà delle serie di Laurent).

Se $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ converge in $\Omega = z_0 + A(r, R)$ allora

1. f è olomorfa in Ω

2. per ogni $r < \rho < R$ vale $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$.

Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).

1) Definiamo esplicitamente la serie di Laurent derivata:

$$f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Osserviamo che l'anello di convergenza di questa serie è lo stesso di quello di f (segue da $\lim_n \sqrt[n]{n+1} = 1$). Osserviamo ora che f'_+ è olomorfa su $B_R(z_0)$ perché derivata di una olomorfa, mentre f'_- è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus B_r(z_0)$ perché è la composizione di due olomorfe: $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{-n} \zeta^{n-1}$ che è olomorfa su $B_{\frac{1}{r}}(0)$ perché serie di potenze con raggio di convergenza $\frac{1}{r}$ e $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ che è olomorfa ovunque eccetto z_0 .

2) Per gli a_n con $n \geq 0$ questo segue da (4.92). Se $n < 0$ allora consideriamo la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k-n} (z - z_0)^k = f(z) (z - z_0)^n.$$

Questa ha le stesse proprietà di convergenza, quindi possiamo scrivere

$$a_n = a_{0+n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta) (\zeta - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{0+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

come voluto. □

Teorema 4.118 (Olomorfa su Anello è serie di Laurent).

Siano $0 \leq r < R \leq +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\Omega = z_0 + A(r, R)$. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ allora f si esprime tramite un'unica serie di Laurent in z_0 convergente in Ω .

Dimostrazione.

Unicità) Segue dal secondo punto della proposizione precedente (4.117).

Esistenza) Supponiamo $z_0 = 0$. Per trovare la tesi per z_0 generico basterà traslarne una opportuna centrata in 0.

Sia $z \in A(r, R)$, allora per lemma (4.114) vale la seguente identità

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

per ogni ρ_1, ρ_2 tali che $r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R$. Cerchiamo di trasformare i due addendi sopra nelle due serie che definiscono una serie di Laurent.

Se $|\zeta| = \rho_2$ allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

Se $|\zeta| = \rho_1$ allora

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z^{m+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\zeta^{-n+1}}.$$

Osserviamo che le serie convergono uniformemente in ζ dato che ha modulo fissato e per $\zeta = \rho_{1,2}$ convergono. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=a_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} d\zeta}_{=a_{-n}} z^{-n} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \end{aligned}$$

come voluto. La serie come data a priori converge in $A(\rho_1, \rho_2)$, ma poiché l'integrale che definisce a_n non cambia al variare di $\rho_{1,2}$ (purché rimangano tali che $r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R$) si ha che in realtà la scrittura vale su $A(r, R)$. \square

4.8.2 Tipi di singolarità

Definizione 4.119 (Tipi di singolarità).

Sia $f \in \mathcal{O}(B_R(z_0) \setminus \{z_0\}) = \mathcal{O}(z_0 + A(0, R))$ e scriviamo f in serie di Laurent come segue

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Si dice che z_0 è

- una **singolarità eliminabile** se $a_n = 0$ per ogni $n < 0$.
- un **polo di ordine** $k > 0$ se $a_{-k} \neq 0$ e $a_n = 0$ per $n < -k$.
Un polo si dice **semplice** se ha ordine 1.
- una **singolarità essenziale** altrimenti.

Osservazione 4.120 (Singolarità eliminabili possono essere ignorate).

Se z_0 è una singolarità eliminabile di $f = \sum a_k (z - z_0)^k$ allora ponendo $f(z_0) = a_0$ si ha che $f \in \mathcal{O}(B_R(z_0))$.

Dimostrazione.

Osserviamo che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$, quindi con la definizione data si ha che f è continua su $B_R(z_0)$. Poiché f è continua e olomorfa eccetto che in un punto si ha che è olomorfa (4.83). \square

Osservazione 4.121 (I poli si possono fattorizzare).

Se z_0 è un polo di ordine k per $f = \sum_n a_n$ allora

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} h(z)$$

dove h è una funzione olomorfa e $h(z_0) \neq 0$.

Dimostrazione.
Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z - z_0)^n + g(z) = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^{n+k} = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k} h(z), \end{aligned}$$

dove g e h olomorfe e $h(z_0) = a_{-k} \neq 0$. □

Teorema 4.122 (Estensione di Riemann).

Sia $f \in \mathcal{O}(B^*)$, dove $B^* = B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Allora se $|f|$ è limitato in B^* si ha che z_0 è una singolarità eliminabile.

Dimostrazione.

Se $|f|$ è limitato allora $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$ ¹⁶, quindi definiamo

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{se } z \neq z_0 \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

Per quanto detto g è continua, mostriamo che è anche olomorfa:

Poiché $f \in \mathcal{O}(B^*)$, si ha che g è olomorfa in ogni punto eccetto eventualmente z_0 , ma sappiamo¹⁷ che una mappa continua e olomorfa eccetto in un segmento è olomorfa (4.83).

Sia $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ lo sviluppo di Laurent di f attorno z_0 e $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^n$ lo sviluppo di Taylor di g sempre attorno z_0 . Osserviamo che

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta = a_{n-1},$$

dunque $a_{n-1} = 0$ per $n < 0$ (cioè $a_n = 0$ per $n < -1$) e $a_{-1} = b_0 = g(z_0) = 0$. Abbiamo dunque verificato che $a_n = 0$ per $n < 0$, che è la definizione di singolarità eliminabile. □

Teorema 4.123 (Casorati-Weierstass).

Sia $f \in \mathcal{O}(B^*)$, dove $B^* = B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Se z_0 è un singolarità essenziale allora $f(B^*)$ è denso in \mathbb{C} .

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che $f(B^*)$ non sia denso in \mathbb{C} . Allora esistono $w_0 \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$ tali che $\overline{f(B^*)} \cap B_\rho(w_0) = \emptyset$. Sia $g : B^* \rightarrow \mathbb{C}$ data da

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

¹⁶Prodotto tra limitata e infinitesima è infinitesima

¹⁷per quello che è stato mostrato a lezione dovremmo verificare anche che g è C^1 , ma ripercorrendo la dimostrazione del teorema a cui ci stiamo appellando basterebbe sapere che fdz è una forma chiusa, che sappiamo essere il caso usando il teorema di Cauchy (4.81).

Osserviamo che $g \in \mathcal{O}(B^*)$ perché composizione di oloedorfe. Per definizione di w_0 abbiamo $|f(z) - w_0| \geq \rho$, dunque per ogni $z \in B^*$ vale

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\rho} \in \mathbb{R}.$$

Poiché g è oloedorfa su B^* ed è limitata, per il teorema di estensione di Riemann (4.122) abbiamo che z_0 è una singolarità trascurabile per g e quindi possiamo considerare $g \in \mathcal{O}(B)$ senza problemi. Per definizione $(f(z) - w_0)g(z) = 1 \iff g(z)f(z) = 1 + w_0g(z)$ in B^* , cioè

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0.$$

Scriviamo $g(z) = (z - z_0)^k h(z)$ con $h \in \mathcal{O}(B)$ e $h(z_0) \neq 0$, da cui

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{h(z)}.$$

Poiché $h(z_0) \neq 0$ abbiamo che $1/h$ è oloedorfa in un intorno di z_0 , quindi f ha un polo di ordine k in z_0 , che è assurdo perché avevamo supposto z_0 singolarità essenziale. \square

4.9 Funzioni meromorfe e Residui

Definizione 4.124 (Funzione meromorfa).

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una funzione **meromorfa** su U è una funzione oloedorfa $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ dove $S \subseteq U$ è discreto e per ogni $z_0 \in S$ si ha che z_0 è un polo.¹⁸

Osservazione 4.125.

Se $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sono oloedorfe con U connesso e g non costantemente nulla, allora $\frac{f}{g}$ è meromorfa.

Dimostrazione.

Poiché U è connesso e g non è costantemente nulla si ha che $S = g^{-1}(0)$ è discreto per (4.36). Dunque $\frac{f}{g} : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ è oloedorfa. \square

Osservazione 4.126 (Inversione mantiene l'ordine scambiando zeri e poli).

Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è oloedorfa non costantemente nulla con U dominio e $f(z_0) = 0$ con ordine di annullamento n_0 allora $\frac{1}{f}$ ha un polo di ordine n_0 in z_0 .

Dimostrazione.

Osserviamo che

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} h(z)$$

con $h(z) \neq 0$ e oloedorfa in un intorno di z_0 (4.34). In questo intorno abbiamo dunque che

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} g(z),$$

con g oloedorfa in questo intorno. Dunque z_0 è un polo di ordine n_0 per $\frac{1}{f}$. \square

¹⁸Intuitivamente una funzione è meromorfa se è oloedorfa ovunque eccetto in qualche polo isolato.

Definizione 4.127 (Residuo).

Siano $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ e $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Definiamo il **residuo** di f in z_0 come

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-1+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz,$$

dove $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ è lo sviluppo di Laurent di f su $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ per ε abbastanza piccolo e $\alpha(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$.

Osservazione 4.128.

Il residuo è una misura di "quanto la forma $f dz$ non è esatta".

Proposizione 4.129 (Formola del residuo per rapporto di olomorfe).

Se $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe con z_0 uno zero di ordine 1 per h e $g(z_0) \neq 0$ allora posta $f = \frac{g}{h}$ abbiamo che z_0 è un polo di ordine 1 per f e

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Dimostrazione.

Se z_0 è un polo semplice allora

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{=k(z)},$$

dunque $(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)k(z)$, da cui

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) - \overset{0}{\cancel{(z - z_0)k(z)}} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z),$$

dove $(z - z_0)k(z)$ va a 0 perché continua in z_0 e ha valore 0 in z_0 .

Segue che

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \stackrel{h(z_0)=0}{=} g(z_0) \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

□

Teorema 4.130 (Teorema dei Residui).

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $S \subseteq U$ discreto chiuso¹⁹, $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $K \subseteq U$ una regione compatta omeomorfa a D^2 . Sia $\alpha : [0, 1] \rightarrow \partial K$ una parametrizzazione di ∂K in senso antiorario. Assumiamo anche $S \cap \partial K = \emptyset$. Allora valgono le seguenti affermazioni:

1. $S \cap K$ è finito

2.
$$\int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S \cap K} \text{Res}(f, z_0).$$

¹⁹Per esempio: una successione che tende a un punto in U non è ammessa, invece una che accumula a un punto sul bordo di U va bene perché come sottoinsieme di U è chiusa.

Dimostrazione.

1) Segue immediatamente osservando che S è discreto e K è compatto, infatti se $S \cap K$ fosse infinito allora possiamo trovarne un punto di accumulazione dividendo K in regioni di diametro sempre più piccolo.²⁰

2) Siano z_1, \dots, z_n i punti di $K \cap S$. Sia $P = \alpha(0) = \alpha(1) \in \partial K$.

Scegliamo $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che:

- γ_i è un cammino da P a un punto vicino a z_i che non passa per alcun punto di S , dove per “vicino” si intende tale che $(B_{|z_i - \gamma_i(1)|}(z_i) \setminus \{z_i\}) \cap S = \emptyset$.
- α_i è un laccio con punto base $\gamma_i(1)$ che gira attorno a z_i una volta in senso antiorario e che non gira attorno a nessun altro z_j .

Consideriamo la giunzione

$$\beta = \gamma_1 * \alpha_1 * \overline{\gamma_1} * \gamma_2 * \alpha_2 * \overline{\gamma_2} * \dots * \gamma_n * \alpha_n * \overline{\gamma_n}.$$

Usando il fatto che $K \cong D^2$ si vede²¹ che $\alpha \simeq \beta$ a estremi fissi.

Questo mostra per (4.75) che

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz,$$

in quanto $f dz$ è chiusa in $U \setminus S$. Per concludere osserviamo che

$$\int_{\beta} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i * \alpha_i * \overline{\gamma_i}} f dz = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} f dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j),$$

come volevamo. □

4.9.1 Derivata Logaritmica

Definizione 4.131 (Derivata logaritmica).

Data una funzione derivabile f definiamo la sua **derivata logaritmica** nei punti dove non si annulla come

$$\frac{f'}{f}.$$

Osservazione 4.132 (La derivata logaritmica trasforma poli e zeri in poli semplici).

Se z_0 è uno zero o polo di f tale che

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$$

con $g(z_0) \neq 0$, $g(z)$ olomorfa vicina a z_0 e $n_0 \neq 0$ allora vicino a z_0 si ha che

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n_0(z - z_0)^{n_0-1} g(z) + (z - z_0)^{n_0} g'(z)}{(z - z_0)^{n_0} g(z)} = \\ &= \frac{n_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che $\frac{g'(z)}{g(z)}$ è olomorfa vicino a z_0 perché $g(z_0) \neq 0$.

²⁰Questo è praticamente il teorema di Bolzano-Weierstrass

²¹Fidatevi o fate il disegno.

Osservazione 4.133.

Simbolicamente si ha che

$$\frac{f'}{f} = \log(f)',$$

da cui il nome.

Proposizione 4.134 (Residuo in polo della derivata logaritmica è l'ordine del polo/zero).

Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è meromorfa anche $\frac{f'}{f}$ lo è e i poli di $\frac{f'}{f}$ coincidono esattamente con i poli e gli zeri di f , inoltre

$$\text{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right) = n_0$$

dove n_0 è l'ordine di z_0 come zero di f se positivo o $-n_0$ è l'ordine di z_0 come polo di f .

Dimostrazione.

Scriviamo

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_0}{z - z_0} + h$$

con h olomorfa vicino a z_0 . Si ha dunque che $\frac{f'}{f}$ ha un polo semplice in z_0 e il corrispondente a_{-1} è n_0 , quindi per definizione di residuo si ha che

$$\text{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right) = n_0.$$

□

Teorema 4.135 (Teorema di Derivata logaritmica).

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa e $K \subseteq U$ compatto omeomorfo a D^2 . Se α è una parametrizzazione in senso antiorario di ∂K e ∂K non contiene né zeri né poli di f allora

$$\int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(Z - P)$$

dove Z è la somma degli ordini di tutti gli zeri di f contenuti in K e P è la somma degli ordini di tutti i poli di f in K .

Dimostrazione.

Applico il teorema dei residui (4.130) e poi la proposizione (4.134). □

Corollario 4.136 (Teorema di Rouché).

Siano $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe e $K \subseteq U$ un compatto omeomorfo a D^2 . Supponiamo che $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \partial K$ (in particolare $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial K$). Allora il numero di zeri contati con molteplicità di f e di $f - g$ in K coincidono.

Dimostrazione.

Per ogni $t \in [0, 1]$ poniamo $f_t = f - tg$. Chiaramente f_t è olomorfa su U . Per il teorema di derivata logaritmica (4.135), se indichiamo con Z_t il numero di zeri

con molteplicità di f_t contenuti in K allora, poiché $f_t(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial K$ per ipotesi sui moduli di f e g in ∂K , abbiamo che

$$\mathbb{Z} \ni Z_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z) - tg'(z)}{f(z) - tg(z)} dz.$$

Osserviamo che f'_t e f_t sono continue in t (lineari), quindi il rapporto è continuo se il denominatore non si annulla, che non succede per ipotesi sui moduli di f e g sul bordo. Si ha dunque che Z_t è integrale di una funzione continua in t , quindi è una funzione continua in t . Poiché Z_t è continua in t , ma ha valori in \mathbb{Z} , che è discreto, necessariamente Z_t costante in t . In particolare

$$Z_0 = Z_1$$

che è la tesi. □

Appendice A

Appendice: Teoria delle categorie

In questo capitolo diamo le definizioni base e alcuni risultati di teoria delle categorie. Gli argomenti di questa sezione non sono parte del programma ma sono concetti che spuntano di continuo nel corso (e nei corsi degli anni prossimi). La prassi per l'apprendimento di questi concetti sembra essere “sentirli dire di passaggio così tante volte da capirli intuitivamente”, ma certamente non nuoce vederli scritti in modo esplicito almeno una volta nella vita.

A.1 Definizione

Definizione A.1 (Classe).

Data una formula $\varphi(x)$, la **classe** C associata a questa *formula* è un insieme formale definito da

$$x \in C \iff \varphi(x).$$

Osservazione A.2.

Ci sono classi che NON sono insiemi, per esempio la classe degli insiemi che non appartengono a se stessi. Una classe che non è un insieme è detta **propria**.

Definizione A.3 (Categoria).

Una **categoria** \mathcal{C} consiste di una classe di **oggetti**, che denotiamo $\text{obj}(\mathcal{C})$, e una classe di **morfismi** (o **frecce**), che denotiamo $\text{Mor}(\mathcal{C})$, tali che

- Per ogni morfismo f esiste un'unica coppia di oggetti $\text{dom}(f)$, $\text{cod}(f) \in \text{obj}(\mathcal{C})$ detti **dominio** (o **oggetto sorgente**) e **codominio** (o **oggetto destinazione**).

Per indicare che f è un morfismo con dominio A e codominio B scriviamo

$$f : A \rightarrow B.$$

Denotiamo la classe dei morfismi con dominio A e codominio B con

$$\text{Mor}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B),$$

dove usiamo la seconda notazione se si presentano ambiguità.

- Per ogni coppia di morfismi f, g tali che $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ è definito il morfismo **composizione** $g \circ f : \text{dom}(f) \rightarrow \text{cod}(g)$.
- La composizione di morfismi è associativa, ovvero $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- Per ogni oggetto X in $\text{obj}(\mathcal{C})$ esiste un morfismo $id_X : X \rightarrow X$ detto **morfismo identità** tale che:

$$\begin{aligned} \forall f \in \text{Mor}(A, X) \quad id_X \circ f &= f \\ \forall g \in \text{Mor}(X, B) \quad g \circ id_X &= g \end{aligned}$$

Definizione A.4 (Categorie piccole e localmente piccole).

Una categoria \mathcal{C} è **piccola** se le classi $\text{obj}(\mathcal{C})$ e $\text{Mor}(\mathcal{C})$ sono insiemi.

Una categoria \mathcal{C} è **localmente piccola** se per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{C})$ si ha che $\text{Mor}(X, Y)$ è un insieme.

Osservazione A.5.

Nella pratica abbiamo una categoria quando definiamo oggetti con una certa struttura e mappe che preservano questa struttura. Da questa descrizione si ha che quasi tutte le categorie che ci interessano (tutte nel caso di questo corso) sono localmente piccole.

Definizione A.6 (Diagramma commutativo).

Un **diagramma** è un grafo i cui nodi sono oggetti di una categoria \mathcal{C} e le cui frecce sono dei morfismi tra gli oggetti considerati.¹ Di solito si omettono le identità e le composizioni.

Un diagramma si dice **commutativo** se per ogni coppia di vertici del diagramma, la composizione di frecce dall'uno all'altro non dipende dal cammino sul diagramma.

Esempio A.7 (Diagrammi commutativi semplici).

Il seguente diagramma commuta se e solo se $f = h \circ g$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Z \end{array}$$

Il seguente diagramma commuta se e solo se $g \circ f = q \circ p$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{q} & D \end{array}$$

Osservazione A.8.

I diagrammi si possono comporre, cioè un diagramma commuta se e solo se tutti i suoi sotto-diagrammi commutano. Per esempio il seguente diagramma commuta se e solo se commutano il triangolo a sinistra e il quadrato a destra:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & D \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \longrightarrow & E \end{array}$$

¹Se comodo possiamo considerare più vertici che rappresentano lo stesso oggetto e più frecce che rappresentano lo stesso morfismo.

Definizione A.9 (Isomorfismo).

Un morfismo $f : A \rightarrow B$ è un **isomorfismo** se esiste un morfismo $g : B \rightarrow A$ tale che

$$\begin{aligned}g \circ f &= id_A \\ f \circ g &= id_B.\end{aligned}$$

Un tale g è detto **inverso di f** .

Proposizione A.10.

Se un inverso esiste è unico.

Dimostrazione.

Siano g_1, g_2 inversi di f , allora

$$g_2 \circ f = id_A \implies g_2 \circ f \circ g_1 = id_A \circ g_1 \implies g_2 \circ id_B = g_1 \implies g_2 = g_1.$$

□

Proposizione A.11.

Se un morfismo ha inversa destra e inversa sinistra allora queste coincidono.

Dimostrazione.

Se $f : A \rightarrow B$ ammette inversa sinistra g_s e inversa destra g_d allora

$$g_s \circ f = id_A, f \circ g_d = id_B \implies g_s = g_s \circ id_A = g_s \circ f \circ g_d = id_B \circ g_d = g_d.$$

□

Definizione A.12 (Automorfismi).

Se \mathcal{C} è una categoria localmente piccola e $A \in \text{obj}(\mathcal{C})$, l'insieme

$$\text{Aut}(A) = \{f \in \text{Mor}(A, A) \mid f \text{ isomorfismo}\}$$

dotato dell'operazione di composizione di morfismi è un gruppo che chiamiamo **gruppo degli automorfismi** di A .

Definizione A.13 (Funtore).

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due categorie.

Un **funtore covariante** T da \mathcal{C} a \mathcal{D} (denotato $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$) è una collezione dei seguenti dati:

- una funzione classe $T : \text{obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{obj}(\mathcal{D})$
- $\forall A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$ una funzione classe $T : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(T(A), T(B))$.

Questi dati rispettano inoltre le seguenti proprietà:

- $T(id_A) = id_{T(A)}$,
- $T(m_1 \circ m_2) = T(m_1) \circ T(m_2)$.

Un **funtore controvariante** T da \mathcal{C} a \mathcal{D} è definito come sopra eccetto per il fatto che se $m : A \rightarrow B$ allora $T(m) : T(B) \rightarrow T(A)$ e $T(m_1 \circ m_2) = T(m_2) \circ T(m_1)$.

Osservazione A.14.

Nella pratica un funtore è una mappa che trasforma relazioni in una categoria in relazioni in un'altra categoria, per esempio il f "gruppo fondamentale" associa ad uno spazio topologico con punto fissato il suo gruppo fondamentale con il dato punto base, inoltre con le mappe che abbiamo denotato con il pedice * questo funtore associa a mappe continue degli omomorfismi di gruppi.

Teorema A.15.

Un funtore manda isomorfismi in isomorfismi.

Dimostrazione.

Se g è l'inversa di f e T è un funtore allora

$$id_{F(a)} = F(id_a) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

e analogamente per $F(f) \circ F(g)$, quindi $F(f)$ è un morfismo con inversa $F(g)$. \square

Definizione A.16 (Trasformazione naturale).

Date due categorie \mathcal{C}, \mathcal{D} e F_1, F_2 funtori tra \mathcal{C} e \mathcal{D} , una **trasformazione naturale** φ tra F_1 e F_2 è una funzione dagli oggetti di \mathcal{C} ai morfismi di \mathcal{D} tale che per $f : a \rightarrow b$ in $\text{Mor}_{\mathcal{C}}$ vale il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F_1(a) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1(f)} \\ \xleftarrow{\text{ondulato}} \end{array} & F_1(b) \\ \downarrow \varphi(a) & & \downarrow \varphi(b) \\ F_2(a) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2(f)} \\ \xleftarrow{\text{ondulato}} \end{array} & F_2(b) \end{array}$$

dove per le frecce orizzontali il tratto liscio indica il caso dove i funtori sono covarianti e il tratto ondulato il caso dei funtori controvarianti.

Definizione A.17 (Equivalenza di categorie).

Se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sono funtori tali che $F \circ F'$ e $F' \circ F$ sono naturalmente isomorfi ai funtori identità allora \mathcal{C} e \mathcal{D} si dicono **categorie equivalenti**.

Esempio A.18.

La categoria degli spazi vettoriali su \mathbb{K} a dimensione finita è equivalente alla categoria i cui oggetti sono \mathbb{K}^n al variare di n e i cui morfismi sono matrici a coefficienti in \mathbb{K} .

A.2 Proprietà universali

Fissata una categoria, una **proprietà universale** è una proprietà che determina un oggetto a meno di isomorfismo unico.

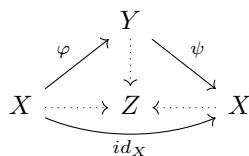
Spesso si usano proprietà universali per definire un oggetto con proprietà volute, dovendone però verificare l'esistenza.

Una **dimostrazione per proprietà universale** è una dimostrazione di buona definizione di un oggetto: viene data una proprietà universale (che garantisce l'unicità) e poi viene esibito un oggetto che rispetta la proprietà universale.

Esempio A.19 (Schema di argomento di unicità per proprietà universale).

Siano X e Y oggetti che rispettano la stessa proprietà universale P . Poiché rispettano una proprietà universale esistono e sono unici $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow$

X che fanno commutare tutti i diagrammi rilevanti. Poiché commutano tutti i diagrammi possiamo costruire un diagramma del tipo

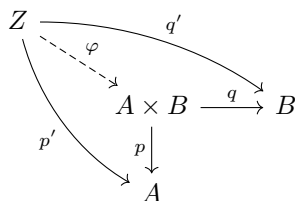


dove Z è un qualche oggetto con il quale X e Y hanno un morfismo in comune per la proprietà universale P (non è importante che le frecce abbiano come codominio Z , l'unico uso che facciamo di Z è costruire il triangolo esterno).

Dato che abbiamo composto diagrammi commutativi questo diagramma è commutativo, quindi $\psi \circ \varphi = id_X$. Con un ragionamento simmetrico troviamo l'altra composizione. Questo mostra che φ e ψ sono isomorfismi tra X e Y .

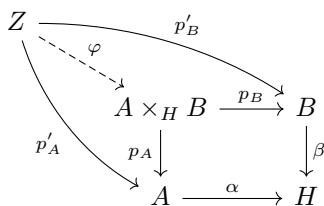
Definizione A.20 (Prodotto).

Fissata una categoria \mathcal{C} e dati due oggetti $A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$, un **prodotto** di A e B è un oggetto $A \times B$ munito di morfismi $p : A \times B \rightarrow A$ e $q : A \times B \rightarrow B$ tali che per ogni oggetto Z munito di morfismi $p' : Z \rightarrow A$ e $q' : Z \rightarrow B$ esiste un unico morfismo $\varphi : Z \rightarrow A \times B$ tale che il diagramma commuta



Definizione A.21 (Prodotto fibrato).

Fissata una categoria \mathcal{C} e dati tre oggetti $A, B, H \in \text{obj}(\mathcal{C})$ muniti di morfismi $\alpha : A \rightarrow H$ e $\beta : B \rightarrow H$, un **prodotto fibrato** di A e B rispetto ad H (e a α e β) è un oggetto $P = A \times_H B$ munito di morfismi $p_A : P \rightarrow A$ e $p_B : P \rightarrow B$ tali che $\alpha \circ p_A = \beta \circ p_B$ e per ogni oggetto Z munito di mappe $p'_A : Z \rightarrow A$ e $p'_B : Z \rightarrow B$ esiste un unico morfismo $\varphi : Z \rightarrow P$ tale che il diagramma commuta



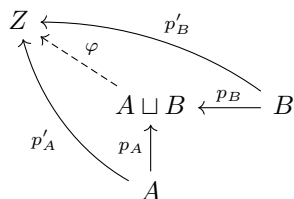
Notazione A.22 (Il prefisso “co”).

Quando inseriamo il prefisso “co” a qualcosa definito tramite un diagramma (specialmente nel caso di oggetti definiti per proprietà universale) intendiamo che la definizione è identica se non per il fatto che tutti i morfismi hanno invertito verso.

Definizione A.23 (Coprodotto).

Definito come il prodotto ma le frecce sono invertite, cioè commuta il seguente

diagramma



Osservazione A.24.

Il prodotto amalgamato di gruppi è il coprodotto fibrato nella categoria dei gruppi. Similmente il teorema di Van-Kampen (3.96) dà condizioni per poter scrivere gruppi fondamentali come coprodotti fibrati di altri gruppi fondamentali.

A.3 Esempi di categorie

Categoria	Oggetti	Morfismi
Set	Insiemi	funzioni
$Subset_X$	Sottoinsiemi di X	inclusione
$Poset$	Insiemi parzialmente ordinati	“essere minori di”
Grp	Gruppi	omomorfismi di gruppi
$Ring$	Anelli commutativi con identità	omomorfismi di anelli
Top	Spazi topologici	funzioni continue
Top_*	Spazi topologici puntati	funzioni continue che rispettano il punto base
$hTop$	Spazi topologici	funzioni continue a meno di omotopia
Riv	Rivestimenti	morfismi di rivestimenti
Mod_A	Moduli sull’anello A	omomorfismi di moduli
$Vec_{\mathbb{K}}$	\mathbb{K} -spazi vettoriali di dimensione finita	mappe lineari
Ab	Gruppi abeliani	omomorfismi di gruppi

Funtore	_variante	Partenza	Arrivo
Dimenticante	co	Roba	Roba - struttura
Comp. conn. per archi (π_0)	co	Top	Set
Gruppo fondamentale (π_1)	co	Top_*	Grp
Duale di sp.vett	contro	$Vec_{\mathbb{K}}$	$Vec_{\mathbb{K}}$

Appendice B

Ringraziamenti

Ringrazio i seguenti per aver collaborato nella stesura di alcune parti, per aver offerto consigli su come migliorare le dispense in generale o per aver segnalato degli errori:

- Alessandro Moretti
- Federico Allegri
- Tommaso Bellanova
- Lorenzo Contorni
- Davide Ranieri
- Cesare Pieve
- Gabriel Videtta
- Lorenzo Bonetti

Segnalo l'esistenza di una versione ridotta delle dispense a cura di Lombardo Luca: <https://github.com/lukefleed/G2-cheat-sheet>